Geometria e Algebra (II), 12.11.12

Elenco sommario degli argomenti svolti nella I parte del corso,

- sistemi lineari
- spazi vettoriali
- spazi affini

e degli argomenti da svolgere nella II parte

- algebra delle matrici
- determinanti
- funzioni lineari
- spazi euclidei
- isometrie

L'algebra delle matrici e' una generalizzazione che va molto lontano dell'algebra dei numeri reali; il determinante di una matrice quadrata e' un polinomio nelle entrate della matrice che permette tra l'altro di dare formule esplicite per le soluzioni dei sistemi lineari; le funzioni lineari sono le funzioni "giuste" fra spazi vettoriali [1] ; gli spazi euclidei sono strutture piu' ricche degli spazi vettoriali, nelle quali sono definti i concetti di lunghezza di un vettore e di angolo fra due vettori; le isometrie sono le "funzioni giuste" fra spazi euclidei.

L'algebra delle matrici e delle funzioni lineari portano ad una piu' profonda comprensione dell'argomento dei sistemi lineari, e permettono di trattare l'argomento dell'evoluzione di un sistema (cfr. i problemi presentati nell'introduzione alla I parte, ed esemplificati con lo studio del bilanciamento di una reazione chimica e dell'evoluzione di un sistema di due specie).

[1] l'algebra delle funzioni lineari sta all'algebra delle matrici cosi' come gli spazi vettoriali astratti stanno agli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$.

Algebra delle matrici. Prodotto di matrici.

1. Nella I parte e' stato definito il prodotto di una matrice per un vettore colonna; qui riprendiamo e sviluppiamo l'argomento: l'operazione fondamentale e' la moltiplicazione di un vettore riga per un vettore colonna, tramite la quale si definisce il prodotto di una matrice per un'altra matrice.

2. Una $n-$pla ordinata puo' essere identificata una matrice riga o con una matrice colonna. Se indicheremo una $n-$pla con una certa lettera, allora indicheremo la corrispondente matrice colonna con la stessa lettera, e la corrispondente matrice riga con la stessa lettera con un apice.

   Cosi', per la $n-$pla
   $$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$
   scriveremo
   $$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \qquad e \qquad v' = [v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n] \,.$$

3. Definiamo il prodotto di una riga a' di numeri reali per una colonna b di numeri reali, aventi lo stesso numero di componenti, come il numero reale ottenuto moltiplicando ciascuna componente di a' per la corrispondente componente di b, e poi sommando. Ad esempio
   $$[1\;2\;3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32.$$
   In generale, si ha
   $$\begin{aligned} a'b &= [a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j b_j. \end{aligned}$$

   > La moltiplicazione di una riga per una colonna aventi diversi numeri di componenti non viene definita.

   Questa operazione puo' essere utilizzata per rappresentare sinteticamente le equazioni lineari. L'equazione lineare
   $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

nelle n incognite reali $x_1, x_2, ..., x_n$ con coefficienti e termine noto i numeri reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b, puo' essere scritta come

$$[a_2\; a_2 \ldots\; a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b,$$

e rappresentata sinteticamente come

$$a'x = b,$$

cioe' come l'equazione lineare nell'unica incognita vettoriale x (a n componenti) con coefficiente il vettore riga a' (a n componenti) e termine noto reale b.

4. Ricordiamo che una matrice con m righe ed n colonne si dice matrice di tipo $m \cdot n$; per indicare che una matrice A ha tipo $m \cdot n$ si usa scrivere

$$\underbrace{A}_{m \cdot n}.$$

L'insieme di tutte le matrici di tipo $m \cdot n$ ad entrate reali viene indicato con

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \qquad \text{oppure} \qquad \mathbb{R}^{m \times n};$$

nella seconda notazione l'insieme delle colonne di m numeri reali viene indicato con $\mathbb{R}^{m \cdot 1}$, e l'insieme delle righe di n numeri reali viene indicato con $\mathbb{R}^{1 \cdot n}$, in sintonia col fatto che l'insieme delle $n-$ple ordinate di numeri reali viene indicato con $\mathbb{R}^n$.

Per indicare una matrice ed i suoi elementi noi useremo spesso una notazione un po' diversa dal solito, notazione suggerita dai linguaggi di alcune applicazioni per il calcolo come Matlab, o Octave.

Una volta scelto un simbolo, nel nostro caso A, per indicare una matrice, useremo il simbolo A_{ij} per indicare l'elemento di posto (i, j) in A; useremo il simbolo A_{i*} per indicare la riga $i-$ma di A, e useremo il simbolo A_{*j} per indicare la colonna $j-$ma di A.

Ad esempio, per

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

si ha:

$$A_{23} = 7, \qquad A_{2*} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \qquad A_{*3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

La generica matrice A di tipo $m \cdot n$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

si puo' vedere come la colonna delle sue m righe, oppure come la riga delle sue n colonne

$$A = \begin{bmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{*1} & \dots & \dots & A_{*n} \end{bmatrix}.$$

5. Se il numero delle colonne di una matrice A e' uguale al numero delle righe di una matrice B, allora possiamo moltiplicare ciascuna riga di A per ciascuna colonna di B, ed organizzare questi prodotti in una tabella; otteniamo cosi' una matrice detta matrice prodotto (righe per colonne) di A per B, ed indicata con AB.

   Se il numero delle colonne di una matrice A e' diverso dal numero delle righe di una matrice B, il prodotto AB non e' definito.

   Ad esempio, si ha

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot 5 & 1\cdot 3 + 2\cdot 6 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 4 & 3\cdot 2 + 4\cdot 5 & 3\cdot 3 + 4\cdot 6 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 4 & 5\cdot 2 + 6\cdot 5 & 5\cdot 3 + 6\cdot 6 \\ 7\cdot 1 + 8\cdot 4 & 7\cdot 2 + 8\cdot 5 & 7\cdot 3 + 8\cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \\ 39 & 54 & 69 \end{bmatrix}$$

   In simboli, il prodotto di una matrice A di tipo $m \cdot n$ per una matrice B di tipo $n \cdot p$ e' la matrice AB di tipo $m \cdot p$

$$\underbrace{A}_{m\cdot n} \underbrace{B}_{n\cdot p} = \underbrace{AB}_{m\cdot p}$$

   data dalla tabella dei prodotti delle m righe di A per le p colonne di B : l'elemento di posto (i, j) in AB e' dato dal prodotto della riga $i-$ma di A per la colonna $j-$ma di B :

$$(AB)_{ij} = A_{i*}B_{*j}, \qquad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, p.$$

Con riferimento agli elementi, si ha

$$\begin{aligned}(AB)_{ij} &= A_{i*}B_{*j}\\ &= A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{in}B_{nj}\\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}.\end{aligned}$$

6. La moltiplicazione di matrici puo' essere utilizzata per rappresentare sinteticamente i sistemi lineari. Il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2\\ & \vdots\\ & \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

di m equazioni lineari nelle n incognite reali $x_1, x_2, ..., x_n$ con coefficienti e termine noti i numeri reali $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ e $b_1, \ldots, b_m$ puo' essere scritto come

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ \vdots\\ b_m \end{bmatrix}$$

e rappresentato sinteticamente come

$$Ax = b,$$

cioe' come un'unica equazione lineare nell'unica incognita vettoriale x (a n componenti) con coefficiente la matrice A (di tipo $m \cdot n$) e termine noto vettoriale b (ad m componenti).

7. Le matrici reali di tipo $1 \cdot 1$ possono essere identificate con i numeri reali, Se per ogni matrice $[a]$ di tipo $1 \cdot 1$ si scrive semplicemente la sua unica entrata a, allora il prodotto di matrici $1 \cdot 1$

$$[a] \cdot [b] = [ab]$$

diventa

$$a \cdot b = ab,$$

cioe' il prodotto di numeri reali.

In altri termini, i numeri reali sono un caso particolare di matrici, e il prodotto di numeri reali e' un caso particolare del prodotto di matrici. E' allora naturale riprendere in esame i tratti salienti della struttura dei numeri reali col prodotto, e indagare quale forma essi assumono per la struttura delle matrici col prodotto.

8. Nell'insieme dei numeri reali c'e' un numero particolare, il numero 1, caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto di 1 per ogni altro numero da' per risultato quell'altro numero:

$$1a = a = a1, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Nell'insieme delle matrici ci sono delle particolari matrici $I_1, I_2, I_3, \dots$ quadrate di ordine $1, 2, 3, \dots$ caratterizzate dalla proprieta' che il prodotto di ognuna di esse per ogni altra matrice (quando e' definito) da' per risultato l'altra matrice.

Per ogni $n = 1, 2, 3, \dots$, si ha dunque una matrice I_n quadrata di ordine n; questa matrice viene detta "matrice unita' di ordine n" ed ha la proprieta' che

$$I_n A = A, \qquad B I_n = B,$$

per ogni matrice A di tipo $n \cdot *$, per ogni matrice B di tipo $* \cdot n$.

Le matrici unita' sono le matrici quadrate che hanno 1 sulla diagonale e 0 altrove, esplicitamente

$$I_1 = [1], \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \dots;$$

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases} \qquad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Verifichiamo l'identita' $I_n A = A$ nel caso $n = 2$. Per ogni matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}$$

di tipo $2 \cdot *$ si ha

$$\begin{aligned} I_2 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot a_1 + 0 \cdot b_1 & 1 \cdot a_2 + 0 \cdot b_2 & \dots \\ 0 \cdot a_1 + 1 \cdot b_1 & 0 \cdot a_2 + 1 \cdot b_2 & \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

In generale, l'identita' $I_n A = A$ si puo' dimostrare come segue:

$$(I_n A)_{ij} = \sum_{k=1,\dots,n} (I_n)_{ik} A_{kj} = (I_n)_{ii} A_{ij} = A_{ij},$$

per ogni $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, *$.

La dimostrazione dall'identita' $B I_n = B$ e' analoga.

9. Ci sono due modi per moltiplicare tre numeri reali a, b, c, rispettando l'ordine:

$$(ab)c, \quad e \quad a(bc);$$

entrambe i modi portano sempre allo stesso risultato:

$$(ab)c = a(bc), \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R};$$

questa e' la proprieta' associativa della moltiplicazione di numeri reali. Ci chiediamo se questa proprieta' continua a valere per la moltiplicazione di matrici.

Consideriamo innanzitutto un esempio.

Per $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$, e $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, si ha

$$\begin{aligned} (AB)C &= \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 18 & 24 \\ 21 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 66 \\ 77 \end{bmatrix} \\ A(BC) &= \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} [11] = \begin{bmatrix} 55 \\ 66 \\ 77 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dunque in questo caso si ha

$$(AB)C = A(BC).$$

Siano ora A, B, C tre matrici qualsiasi. Osserviamo che:

l'espressione $(AB)C$ e' definita se e solo se

n^o col. $A = n^o$ righe B,

n^o col. $AB = n^o$ righe C, *cioe'* n^o col. $B = n^o$ righe C;

inoltre

n^o righe $(AB)C = n^o$ righe $AB = n^o$ righe A,

n^o col. $(AB)C = n^o$ col. C.

l'espressione $A(BC)$ e' definita se e solo se

n^o col. $B = n^o$ righe C;

n^o col. $A = n^o$ righe BC, *cioe'* n^o col. $A = n^o$ righe B,

inoltre

n^o righe $A(BC) = n^o$ righe A,

n^o col. $A(BC) = n^o$ col. $BC = n^o$ col. C.

Dunque, l'epressione $(AB)C$ e' definita se e solo se e' definta l'espressione $A(BC)$, e in tal caso i risultati delle due le espressioni sono matrici dello stesso tipo.

Indichiamo i tipi delle tre matrici A, B, C rispettivamente con $m \cdot n$, $n \cdot p$, $p \cdot q$; cosi' che entrambe le espressioni $(AB)C$ e $A(BC)$ esistano ed abbiano per valore una matrice di tipo $m \cdot q$.

Da un lato si ha

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} C_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} A_{il} B_{lk} C_{kj}, \end{aligned}$$

per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, q$; dall'altro si ha

$$\begin{aligned} (A(BC))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (BC)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} A_{ik} B_{kl} C_{lj}, \end{aligned}$$

per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, q$; si osservi che scambiando l'ordine delle sommatorie e rinominando gli indici di sommatoria un'espressione si trasforma nell'altra. Dunque

$$(AB)C = A(BC),$$

cioe' la moltiplicazione di matrici possiede la proprieta' associativa.

Potremo cosi' scrivere un prodotto di piu' matrici senza usare parentesi.