Geometria e Algebra (II), 12.11.12

1. **Matrice trasposta**

   Siano m ed n due interi positivi fissati. Data una matrice A di tipo $m \times n$, riscrivendo per colonne cio' che in A compare per righe (o, che e' lo stesso, riscrivendo per righe cio' che in A compare per colonne), si ottiene una matrice di tipo $n \times m$, detta matrice trasposta di A ed indicata con

   $$A^{\mathrm{T}}.$$

   In simboli, si ha:

   $$(A^{\mathrm{T}})_{i,j} = A_{j,i}, \qquad i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m.$$

   Ad esempio, si ha

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

2. L'operazione di trasposizione possiede le seguenti proprieta':

   $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A,$

   per ogni matrice A;

   $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$

   per ogni coppia A, B di matrici sommabili;

   $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$

   per ogni coppia A, B di matrici moltiplicabili;

   $(rA)^{\mathrm{T}} = rA^{\mathrm{T}}$

   per ogni matrice A ed ogni scalare r.

   Dimostriamo la proprieta' relativa alla moltiplicazione di matrici. Sia dunque A una matrice di tipo $m \times n$ e sia B una matrice di tipo $n \times p$. Proviamo innanzitutto che l'uguaglianza

   $$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$$

   e' consistente, cioe' che le matrici ai due lati dell'uguaglianza hanno lo stesso tipo. Infatti, da un lato, la matrice AB e' definita ed ha tipo $m \times p$, e la matrice $(AB)^{\mathrm{T}}$ ha tipo $p \times m$; dall'altro, la matrice B^{T} ha tipo $p \times n$, la matrice A^{T} ha tipo $n \times m$, e la matrice $B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$ e' definita ed ha tipo $p \times m$.

   Proviamo ora che

   $$((AB)^{\mathrm{T}})_{i,j} = (B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}})_{i,j}\,, \qquad i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, m.$$

Infatti: al primo membro si ha

$$\begin{aligned}((AB)^{\mathrm{T}})_{i,j} &= (AB)_{j,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}B_{k,i};\end{aligned}$$

al secondo membro si ha

$$\begin{aligned}(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} (B^{\mathrm{T}})_{i,k}\,(A^{\mathrm{T}})_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} B_{k,i}A_{j,k},\end{aligned}$$

e i due risultati sono uguali per la proprieta' commutativa della moltiplicazione di numeri reali.

Si puo' dire che la proprieta' dimostrata e' la forma che prende la proprieta' commutativa del prodotto nel passaggio dai numeri reali alle matrici.

Per finire, osserviamo che una matrice quadrata A e' invertibile se e solo se la sua trasposta A^{T} e' invertibile, inoltre l'inversa della trasposta e' la trasposta dell'inversa:
$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.
Ad esempio, da

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

segue

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

Verifichiamo questa proprieta'. A e' invertibile ed ha inversa B significa che

$$AB = I = BA;$$

trasponendo ciascun membro di queste uguaglianze, otteniamo

$$(AB)^{\mathrm{T}} = I^{\mathrm{T}} = (BA)^{\mathrm{T}},$$

da cui otteniamo

$$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = I = A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}};$$

queste ultime uguaglianze significano che A^{T} e' invertibile ed ha inversa B^{T}.

3. **Sistemi lineari e varieta'**

Nella prima parte del corso si sono stabiliti i seguenti fatti sui sistemi lineari, i sottospazi e le sottovarieta' lineari

(a) sia (a_1, a_2, a_3) una terna di numeri reali, non nulla; l'equazione lineare omogenea

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

in tre incognite x_1, x_2, x_3 ha come insieme di soluzioni un piano π in $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine O, cioe' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2;

ogni equazione lineare

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = p$$

in tre incognite x_1, x_2, x_3 ha come insieme di soluzioni un piano in $\mathbb{R}^3$ parallelo al piano π, cioe' una sottovarieta' lineare di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 avente sottospazio direttore π;

(b) siano (a_1, a_2, a_3) e (b_1, b_2, b_3) due terne di numeri reali, linearmente indipendenti; il sistema di due equazioni lineari omogenee

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{cases}$$

in tre incognite x_1, x_2, x_3 ha come insieme di soluzioni una retta l in $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine O, cioe' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1;

ogni sistema lineare

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = p \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = q \end{cases}$$

in tre incognite x_1, x_2, x_3 ha come insieme di soluzioni una retta in $\mathbb{R}^3$ parallela ad l, cioe' una sottovarieta0 di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1, avente sottospazio direttore l.

Questi fatti suggeriscono un fatto generale sui sistemi lineari in n incognite e le sottovarieta' lineari di $\mathbb{R}^n$:

Teorema 1 *Sia A una matrice di tipo $m \cdot n$ di rango $r(A) = r$. Consideriamo: il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, e l'insieme V delle sue soluzioni:*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = 0\} = V;$$

un sistema lineare consistente $Ax = b$, l'insieme S delle sue soluzioni, e una soluzione particolare u_0 :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = b\} = S,$$

$u_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Au_0 = b$. Allora:

V e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, di dimensione $dim(V) = n - r$;

S e' una sottovarieta' lineare di $\mathbb{R}^n$, la sottovarieta' che ha sottospazio direttore V e passa per u_0; in particolare, $dim(S) = n - r$.

Dimostrazione. Prima proviamo che V e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, cioe' che V e' un sottinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$, chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per scalari.

Osserviamo che V contiene $0 \in \mathbb{R}^n$, in quanto $A0 = 0$. Siano $v_1, v_2 \in V$, sia cioe'

$$Av_1 = 0, \quad Av_2 = 0;$$

osserviamo che:

$$A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = 0 + 0 = 0,$$

cioe' $v_1 + v_2 \in V$; per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A(\alpha v_1) = \alpha(Av_1) = \alpha 0 = 0,$$

cioe' $\alpha v_1 \in V$.

Proviamo S e' una sottovarieta' lineare di $\mathbb{R}^n$, la sottovarieta' che ha sottospazio direttore V e passa per u_0 :

$$S = u_0 + V.$$

Proviamo che $S \supseteq u_0 + V$, cioe' che ogni elemento di $u_0 + V$ appartiene anche a S. Dato un elemento del tipo $u_0 + v$ dove $v \in V$, cioe' $Av = 0$, osserviamo che $A(u_0 + v) = Au_0 + Av = b + 0 = b$, cioe' $u_0 + v \in S$.

Proviamo che $S \subseteq u_0 + V$, cioe' che ogni elemento di S appartiene anche a $u_0 + V$. Dato un elemento $u \in S$, cioe' tale che $Au = b$, scriviamo

$$u = u_0 + (u - u_0);$$

osserviamo che

$$A(u - u_0) = Au - Au_0 = b - b = 0,$$

cioe' $u - u_0 \in V$; dunque u appartiene a $u_0 + V$.

Gli aspetti dell'enunciato riguardanti la dimensione verranno provati in seguito. $\square$

4. **Evoluzione di un sistema. Esempio.**

> Siano C_1 e C_2 due citta'. Consideriamo, a partire da un certo anno i numeri dei residenti in C_1 e C_2. Supponiamo che per un certo periodo, nel passaggio da ciascun anno al'anno successivo i numeri dei residenti in C_1 e C_2 varino secondo la seguente legge:
>
> - l' 80% dei residenti in C_1 mantengono la residenza in C_1, e il restante 20% dei residenti in C_1 prendono residenza in C_2;
> - il 30% dei residenti in C_2 prendono residenza in C_1, e il restante 70% dei residenti in C_2 mantengono la residenza in C_2;
>
> Ci chiediamo come evolvera' nel tempo la distribuzione degli abitanti nelle due citta'.

Indichiamo con $x_1(t)$ il numero dei residenti in C_1 all'anno t, e con $x_2(t)$ il numero dei residenti in C_2 all'anno t, per ogni $t = 0, 1, 2, \ldots$

La legge di variazione si puo' allora esprimere nella forma

$$\begin{cases} x_1(t+1) = 0.8x_1(t) + 0.3x_2(t) \\ x_2(t+1) = 0.2x_1(t) + 0.7x_2(t) \end{cases} \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

oppure, nel formalismo matriciale,

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

o, sinteticamente,

$$x(t+1) = A\, x(t).$$

Osserviamo che

$x(1) = A\, x(0)$

$x(2) = A\, x(1) = AA\, x(0) = A^2\, x(0)$

$\vdots$

$x(t) = A\, x(t-1) = A^t\, x(0)$

$\vdots$

Il problema di determinare l'evoluzione della distribuzione degli abitanti nelle due citta' si traduce nel problema di dare una formula per le potenze della matrice, e magari studiarne il limite quando l'esponente tende a $+\infty$.