Geometria e Algebra (II), 23.11.12

1. Per ogni "tempo" $t = 0, 1, 2, \ldots$ siano $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ n variabili reali; si assuma che nel passaggio da un qualsiasi tempo t al tempo successivo $t+1$ le variabili si evolvano secondo una legge della forma

$$\begin{cases} x_1(t+1) = a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n(t+1) = a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}.$$

Le variabili $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ sono univocamente determinate dal loro valore al tempo $t = 0$ e dalla legge di trasformazione. Ci si pone il problema di dare una formula esplicita per $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ in funzione di t e di $x_1(0), \ldots, x_n(0)$, ed eventualmente di studiare il loro andamento per $t \to +\infty$.

Possiamo pensare che per ogni $t = 0, 1, 2, \ldots,$ e' data una variabile vettoriale

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = x(t)$$

che nel passaggio da un qualsiasi tempo t al tempo successivo $t+1$ si evolve secondo la legge

$$x(t+1) = Ax(t),$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Si ha allora che

$$\begin{aligned} & x(1) = Ax(0), \\ & x(2) = Ax(1) = AAx(0) = A^2x(0), \\ & x(3) = Ax(2) = AA^2x(0) = A^3x(0), \\ & \vdots \\ & x(t) = A^tx(0). \end{aligned}$$

Il problema di dare una formula esplicita per $x(t)$ in funzione di t e $x(0)$ si puo' allora ricondure al problema di dare una formula esplicita per la potenza A^t in funzione di t; lo studio del limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$ si puo' ricondurre allo studio del limite di A^t per $t \to +\infty$.

Studiare le potenze di una matrice e' complicato, perche' il prodotto di matrici e' complicato. Vedremo come, sotto certe condizioni, questo problema si possa risolvere rappresentando la matrice data in funzione di una matrice particolarmente semplice ad essa collegata.

2. **Matrici diagonali**

Una matrice quadrata, come

$$[a], \qquad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \qquad \dots$$

viene detta *matrice diagonale*; spesso per brevita' rappresenteremo una matrice diagonale scrivendo solo gli elementi sulla diagonale:

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}.$$

Da un altro punto di vista, una matrice D quadrata di ordine n e' diagonale se

$$D_{ij} = 0, \qquad \forall i \neq j.$$

Ci interessa il comportamento delle matrici diagonali rispetto al prodotto di matrici. Alcuni esempi:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 32 & 40 & 48 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 16 \\ 21 & 32 \\ 35 & 48 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

In generale si ha che:

premoltiplicare una matrice A $n \cdot p$ per una matrice diagonale D $n \cdot n$ equivale a (pre)moltiplicare ciscuna riga r_i' di A per il corrispondente elemento diagonale d_i di D :

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1' \\ \hline r_2' \\ \hline \vdots \\ \hline r_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 r_1' \\ \hline d_2 r_2' \\ \hline \vdots \\ \hline d_n r_n' \end{bmatrix};$$

postmoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D equivale a (post)moltiplicare ciscuna colonna c_j di A per il corrispondente elemento diagonale d_j di D :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{array} \right] \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} c_1 d_1 & c_2 d_2 & \dots & c_n d_n \end{array} \right].$$

In particolare, il prodotto di due matrici diagonali e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice prodotto sono i prodotti degli elementi corrispondenti delle due matrici fattori:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & & & \\ & a_2b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

Piu' in particolare, la potenza $q-$ma di una matrice diagonale e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice potenza $q-$ma sono le potenze $q-$me degli elementi della matrice:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^q = \begin{bmatrix} a_1^q & & & \\ & a_2^q & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^q \end{bmatrix}.$$

3. Il prodotto di due matrici, definito tramite prodotti di righe per colonne, puo' essere visto in altri modi.

   Siano A una matrice $m \cdot n$, con righe $r'_1, r'_2, \ldots, r'_m$, e B una matrice $n \cdot p$, con colonne $c_1, c_2, \ldots, c_p$; per definizione si ha

$$AB = \begin{bmatrix} r'_1c_1 & r'_1c_2 & \ldots & r'_1c_p \\ r'_2c_1 & r'_2c_2 & \ldots & r'_2c_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r'_mc_1 & r'_mc_2 & \ldots & r'_mc_p \end{bmatrix}.$$

   Osserviamo che

$$\begin{bmatrix} r'_1B \\ \hline r'_2B \\ \hline \vdots \\ \hline r'_mB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_1c_1 & r'_1c_2 & \ldots & r'_1c_p \\ r'_2c_1 & r'_2c_2 & \ldots & r'_2c_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r'_mc_1 & r'_mc_2 & \ldots & r'_mc_p \end{bmatrix} = \left[\ A\,c_1 \mid A\,c_2 \mid \ldots \mid A\,c_p\ \right].$$

   Dunque:

   le righe del prodotto della matrice A per la matrice B sono i prodotti delle righe di A per la matrice B;

   le colonne del prodotto della matrice A per la matrice B sono i prodotti della matrice A per le colonne di B.

   In altri termini, si ha:

$$\begin{bmatrix} r'_1 \\ \hline r'_2 \\ \hline \vdots \\ \hline r'_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} r'_1B \\ \hline r'_2B \\ \hline \vdots \\ \hline r'_mB \end{bmatrix};$$

$$A \left[\ c_1 \mid c_2 \mid \ldots \mid c_p\ \right] = \left[\ A\,c_1 \mid A\,c_2 \mid \ldots \mid A\,c_p\ \right].$$

4. **Autovettori e autovalori, esempio**

Mostriamo ora come il calcolo delle potenze della matrice non diagonale

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

possa essere ricondotto al calcolo delle potenze di una opportuna matrice diagonale.

L'idea e' di rigurdare la matrice A come una funzione

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad x \in \mathbb{R}^2 \mapsto Ax \in \mathbb{R}^2.$$

Ci sono delle colonne sulle quali A agisce in modo particolarmente semplice: una e'

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

in quanto

$$Au = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = u;$$

un'altra e'

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

in quanto

$$Av = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5\,v.$$

In entrambi i casi, A agisce come la moltiplicazione per un numero reale:

$$Au = 1\,u, \qquad Av = 0.5\,v.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} A \left[\ u \mid v\ \right] &= \left[\ Au \mid Av\ \right] \\ &= \left[\ \ \ u \mid 0.5\,v\ \right] \\ &= \left[\ u \mid v\ \right] \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Posto

$$P = \left[\ u \mid v\ \right], \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix},$$

possiamo riscrivere la relazione trovata come

$$AP = PD.$$

Ora, capita che la matrice

$$P = \left[\ u \mid v\ \right] = \left[\begin{array}{r|r} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right]$$

possiede inversa. Dunque possiamo ricavare A in funzione di P e D :

$$A = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di A al calcolo delle potenze di D :

$$\begin{array}{rcl} A & = & PDP^{-1} \\ A^2 & = & PDP^{-1}PDP^{-1} = PDI_2DP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ A^3 & = & PDP^{-1}PD^2P^{-1} = PD^3P^{-1} \\ \vdots & & \\ A^q & = & PD^qP^{-1} \\ \vdots & & \end{array}$$

Cosi' abbiamo

$$\begin{aligned} A^q &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix}^q \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & (0.5)^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Si ha che

$$\begin{aligned} lim_{q\to\infty} A^q &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. **Autovettori e autovalori, caso generale.**

   In generale, data una matrice A quadrata di ordine n, possiamo cercare delle colonne sulle quali A agisce in modo particolarmente semplice ...

   Definizione *Siano A una matrice quadrata di ordine n, $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$; se*

   $$Av = \lambda v,$$

   allora si dice che v e' un autovettore di A, e che λ e' un autovalore di A, associato a v.

   Se la matrice A possiede n autovettori $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, con rispettivi autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, cioe' se

   $$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2, \quad \ldots \quad Av_n = \lambda_n v_n,$$

   allora si ha

   $$\begin{aligned} A \left[\, v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, \ldots \quad v_n \,\right] &= \left[\, Av_1 \,\middle|\, Av_2 \,\middle|\, \ldots \quad Av_n \,\right] \\ &= \left[\, \lambda_1 v_1 \,\middle|\, \lambda_2 v_2 \,\middle|\, \ldots \quad \lambda_n v_n \,\right] \\ &= \left[\, v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, \ldots \quad v_n \,\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

   Indichiamo con P

   $$P = \left[\, v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, \ldots \quad v_n \,\right]$$

   la matrice quadrata di ordine n avente come colonne gli n autovettori v_i, ed indichiamo con D

   $$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

   la matrice diagonale di ordine n con elementi diagonali i corrispondenti autovalori λ_i.

   Cosi' possiamo riscrivere la relazione trovata come

   $$AP = PD.$$

Se capita che la matrice

$$P = \left[\begin{array}{c|c|cc} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{array} \right]$$

avente come colonne gli n autovettori possiede inversa, allora possiamo ricavare A in funzione di P e D :

$$A = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di A al calcolo delle potenze di D :

$$A^q = PD^qP^{-1}.$$