Geometria e Algebra (II), 26.11.12

Determinanti

1. Consideriamo il generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

   di n equazioni nelle n incognite $x_1, \dots, x_n$, dove i coefficienti $a_{11}, \dots, a_{1n}$, $\dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}$ e i termini noti $b_1, \dots, b_n$ sono parametri reali.

   Ci chiediamo: sotto quali condizioni sui parametri a_{ij}, b_i il sistema ha una ed una sola soluzione? Sotto tali condizioni, si puo′ dare una formula per la soluzione?

2. Per $n = 1$ e′ immediato dare risposta alle nostre domande. Consideriamo la generica equazione lineare

$$ax = b$$

   in una incognita x, dove a e b sono parametri reali. L′equazione ha una ed una sola soluzione se e solo se $a \neq 0$, e in tal caso l′unica soluzione e′ data da

$$x = \tfrac{b}{a}.$$

3. Consideriamo ora il generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

   di 2 equazioni nelle 2 incognite x, y, dove i coefficienti a_i, b_i e i termini noti c_i sono parametri reali.

   Ci chiediamo sotto quali condizioni sui parametri il sistema ha una ed una sola soluzione.

   Consideriamo il caso in cui $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$, cosi′ che le equazioni possono essere riscritte

$$y = -\left(a_1/b_1\right)x + c_1/b_1,$$
$$y = -\left(a_2/b_2\right)x + c_2/b_2;$$

   le soluzioni delle due equazioni costituiscono due rette nel piano, con coefficienti angolari $-a_1/b_1$ e $-a_2/b_2$, rispettivamente.

   Le due rette sono incidenti in uno ed un solo punto se e solo se hanno coefficienti angolari diversi, cioe′

$$-a_1/b_1 \neq -a_2/b_2,$$

   cioe′

$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$

Raffinando un poco l'analisi, si prova che in ogni caso il sistema ha una ed una sola soluzione se e solo se

$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$

Si osservi che la condizione coinvolge solo i coefficienti delle incognite, e non i termini noti.

4. **Determinante di una matrice quadrata del II ordine.** Per ogni matrice quadrata del II ordine

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

il numero reale $ad - cb$ viene detto determinante della matrice A, e viene indicato con det$A$:

$$\text{det}A = \text{det} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb.$$

Osserviamo che il determinante della matrice unita' vale

$$\text{det}I_2 = \text{det} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

Inoltre, il determinante di una matrice e' uguale al determinante della matrice trasposta:

$$\text{det} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc = ad - cb = \text{det} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

5. **Proprieta' rispetto alle colonne.** Una matrice quadrata del II ordine puo' essere vista come una riga di due vettori colonna in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}, \qquad \text{do6ve} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Cosi', il determinante di una matrice quadrata del II ordine, che e' appunto una funzione di una matrice quadrata del II ordine,

$$\text{det} : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \text{det}A$$

puo' essere visto come una funzione di due variabili vettoriali in $\mathbb{R}^2$

$$\text{det} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad [a,\ b] \mapsto \text{det}[a,\ b].$$

In quest'ottica, le proprieta' salienti del determinante sono le seguenti:

$$\begin{array}{ll}
1. & \text{det}[a+c,\ b] = \text{det}[a,\ b] + \text{det}[c,\ b], \\
1'. & \text{det}[a,\ b+d] = \text{det}[a,\ b] + \text{det}[a,\ d], \\
2. & \text{det}[\alpha a,\ b] = \alpha\text{det}[a,\ b], \\
2'. & \text{det}[a,\ \beta b] = \beta\text{det}[a,\ b], \\
3. & \text{det}[b,\ a] = -\text{det}[a,\ b], \\
3. & \text{det}[a,\ a] = 0,
\end{array}$$

per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Queste proprieta' si verificano direttamente, ponendo

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \ d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix},$$

ed applicando la definizione. Ne verifichiamo alcune.

Proprieta' 1: da una parte si ha

$$\begin{aligned} \det[a+c, \ b] &= \det \begin{bmatrix} a_1 + c_1 & b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 \end{bmatrix} \\ &= (a_1 + c_1)b_2 - (a_2 + c_2)b_1; \end{aligned}$$

dall'altra si ha:

$$\begin{aligned} \det[a, \ b] + \det[c, \ b] &= \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 + c_1 b_2 - c_2 b_1; \end{aligned}$$

i due risultati sono uguali, per la proprieta' dei numeri reali (distributiva del prodotto rispetto alla somma e commutativa della somma).

Proprieta' 3: da una parte si ha

$$\det[b, \ a] = \det \begin{bmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = b_1 a_2 - b_2 a_1;$$

dall'altra parte si ha

$$-\det[a, \ b] = -\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = -(a_1 b_2 - a_2 b_1);$$

i due risultati sono uguali, per la proprieta' dei numeri reali (commutativa del prodotto e commutativa della somma).

La proprieta' 4 puo' essere dedotta dalla proprieta' 3, oppure verificata direttamente:

$$\det[a, \ a] = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0,$$

per la proprieta' commutativa del prodotto di numeri reali.

6. **Sistemi lineari, regola di Cramer.** Consideriamo il generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

di 2 equazioni nelle 2 incognite x, y, dove i coefficienti a_i, b_i e i termini noti c_i sono parametri reali.

Abbiamo visto che il sistema ha una ed una sola soluzione se e solo se

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0;$$

in altri termini, se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti e' diverso da 0:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Sotto questa condizione, si puo' dare una formula esplicita per la soluzione, in funzione dei parametri cha caratterizzano il sistema.

Possiamo riscrivere il sistema nella forma

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

in breve

$$ax + by = c.$$

Le soluzioni del sistema sono date da

$$x = \frac{\det[c,\ b]}{\det[a,\ b]},$$
$$y = \frac{\det[a,\ c]}{\det[a,\ b]}.$$

In altri termini: ciascuna incognita e' data dal rapporto di due determinanti, il cui denominatore e' il determinante della matrice dei coefficienti; per la prima incognita, il numeratore e' il determinante della matrice ottenuta dalla matrice dei coefficienti sostituendo alla prima colonna la colonna dei termini noti; per la seconda incognita, il numeratore e' il determinante della matrice ottenuta dalla matrice dei coefficienti sostituendo alla seconda colonna la colonna dei termini noti.

Il complesso di queste formule e' detto "regola di Cramer" per la soluzione del sistema.

Esempio. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + 5y = 9 \end{cases}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti e'

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -2 \neq 0.$$

Dunque il sistema ha una ed una sola soluzione. La regola di Cramer fornisce

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} = \frac{13}{-2} = -\frac{13}{2}$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} = \frac{-14}{-2} = 7.$$

7. La regola di Cramer si puo' ricavare dalle proprieta' del determinante rispetto alle colonne.

   Formula per la x. L'uguaglianza fra vettori colonna

   $$ax + by = c$$

   implica l'uguaglianza fra matrici del II ordine

   $$[ax + by,\ b] = [c,\ b]$$

   che a sua volta implica l'uguaglianza fra scalari

   $$\det[ax + by,\ b] = \det[c,\ b].$$

   Il primo membro puo' essere riscritto

   $$\begin{aligned}\det[ax + by,\ b] &= \det[ax,\ b] + \det[by,\ b] \\ &= \det[a,\ b]x + \det[b,\ b]y = \det[a,\ b]x.\end{aligned}$$

   Dunque abbiamo l'uguaglianza

   $$\det[a,\ b]x = \det[c,\ b],$$

   dalla quale, essendo $\det[a,\ b] \neq 0$, ricaviamo

   $$x = \frac{\det\,[c, b]}{\det\,[a, b]}.$$

   Formula per la y. L'uguaglianza fra vettori colonna

   $$ax + by = c$$

   implica l'uguaglianza fra matrici del II ordine

   $$[a,\ ax + by] = [a,\ c]$$

   che a sua volta implica l'uguaglianza fra scalari

   $$\det[a,\ ax + by] = \det[a,\ c].$$

   Il primo membro puo' essere riscritto

   $$\begin{aligned}\det[a,\ ax + by] &= \det[a,\ ax] + \det[a,\ by] \\ &\det[a,\ a]x + \det[a,\ b]y = \det[a,\ b]y.\end{aligned}$$

   Dunque abbiamo l'uguaglianza

   $$\det[a,\ b]y = \det[b,\ c],$$

   dalla quale, essendo $\det[a,\ b] \neq 0$, ricaviamo

   $$y = \frac{\det\,[a, c]}{\det\,[a, b]}.$$

8. **Moltiplicativita', matrice inversa.** Il determinante non si comporta bene rispetto alle operazioni di somma di matrici e di prodotto di una matrice per uno scalare.

   Non vale l'identita' $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$; ad esempio, per

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e dunque} \quad A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

si ha det$(A+B)=1$, mentre det$(A)+$det$(B)=0+0=0$.

Non vale l'identita' det$(\alpha C)=\alpha$det(C); ad esempio, per

$$C=I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e dunque} \quad \alpha C=\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

si ha det$(\alpha C)=\alpha^2$, mentre αdet$(C)=\alpha\cdot 1=\alpha$.

Il determinante si comporta bene invece rispetto al prodotto di matrici; vale l'identita'

$$\text{det}(AB)=\text{det}(A)\text{det}(B),$$

per ogni A, B matrici quadrate del II ordine. Questa identita' puo' essere verificata direttamente; non diamo la verifica.

Per quanto riguarda l'invertibilita' e l'inversione, abbiamo che

una matrice $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *e' invertibile se e solo se det*$(A)=ad-bc\neq 0$; *in tal caso, l'inversa di* A *e' data da*

$$(@) \qquad A^{-1}=\frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Verifichiamo l'affermazione "se A e' invertibile allora det$(A)\neq 0$." Se A possiede inversa A^{-1}, allora si ha in particolare che

$$AA^{-1}=I_2;$$

applicando il determinante ad entrambe i membri si ha

$$\text{det}\left(AA^{-1}\right)=\text{det}\left(I_2\right),$$

$$\text{det}(A)\text{det}\left(A^{-1}\right)=1,$$

da cui segue det$(A)\neq 0$.

La verifica dell'affermazione "se det$(A)\neq 0$ allora A e' invertibile e la sua inversa e' data dalla (@)" e' lasciata al lettore.