Geometria e Algebra (II), 27.11.12

1. **Definizione**

   D'ora innanzi, al posto di dire "matrice quadrata di tipo $n \cdot n$" o "matrice quadrata $n \cdot n$" diremo "matrice quadrata di ordine n" o in breve "matrice di ordine n."

   Il determinante di una matrice quadrata di ordine n ad entrate reali e' un numero reale, che puo' essere definito in vari modi equivalenti; di seguito noi ne diamo una definizione ricorsiva: definiamo il determinante per le matrici di ordine 1 e, assumendo di avere definito il determinante per le matrici di ordine $n-1$, definiamo il determinante per le matrici di ordine n.

   Denoteremo il determinante di una matrice A con det(A) (come abbiamo fatto nel caso $n = 2$) o con $|A|$ (piu' spesso, quasi sempre); cosi', per il determinante della matrice

   $$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

   alla notazione

   $$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb,$$

   preferiremo spesso la notazione

   $$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

2. Sia $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ un intero positivo, e sia

   $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali $a_{ij} \in \mathbb{R}$; il determinante di A e' il numero reale

   $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$$

   definito ricorsivamente come segue.

   - per $n = 1$, il determinante della matrice $A = [a_{11}]$ e' il suo unico elemento:

     $$|A| = |a_{11}| = a_{11}.$$

- sia $n > 1$. Supponiamo che sia definito il determinante per ogni matrice quadrata di ordine $n-1$.

  Per ogni coppia (i,j), con $i,j = 1,\dots,n$, consideriamo il determinante della matrice di ordine $n-1$ ottenuta da A cancellando la riga $i-$ma e la colonna $j-$ma, lo chiamiamo "minore complementare" $(i,j)-$mo di A e lo indichiamo con M_{ij} :

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & & \cancel{a}_{1j} & & a_{1n} \\ & & \vdots & & \\ \cancel{a}_{i1} & \dots & \cancel{a}_{ij} & \dots & \cancel{a}_{in} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & & \cancel{a}_{nj} & & a_{nn} \end{vmatrix};$$

  poniamo inoltre [1]

$$\varepsilon_{ij} = (-1)^{i+j} = \begin{cases} +1 & \text{se } i+j \text{ pari,} \\ -1 & \text{se } i+j \text{ dispari.} \end{cases}.$$

  Diciamo determinate di A il numero reale ottenuto sommando i prodotti degli elementi di una colonna di A per i rispettivi complementi algebrici, pesati con i segni dati dagli ε. Precisamente, poniamo

$$|A| = \varepsilon_{1j} a_{1j} M_{1j} + \varepsilon_{2j} a_{2j} M_{2j} + \dots + \varepsilon_{nj} a_{nj} M_{nj} =$$

$$\varepsilon_{1j} a_{1j} \begin{vmatrix} \cancel{a}_{11} & \dots & \cancel{a}_{1j} & \dots & \cancel{a}_{1n} \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & & \cancel{a}_{nj} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \varepsilon_{2j} a_{2j} \begin{vmatrix} a_{11} & & \cancel{a}_{1j} & & a_{1n} \\ \cancel{a}_{21} & \dots & \cancel{a}_{2j} & \dots & \cancel{a}_{2n} \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & & \cancel{a}_{nj} & & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + \varepsilon_{nj} a_{nj} \begin{vmatrix} a_{11} & & \cancel{a}_{1j} & & a_{1n} \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ \cancel{a}_{n1} & \dots & \cancel{a}_{nj} & \dots & \cancel{a}_{nn} \end{vmatrix},$$

[1]esplicitamente, i valori degli ε_{ij} sono dati dalla matrice

$$\begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 & \\ -1 & +1 & -1 & \ddots \\ +1 & -1 & +1 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

dove j e' un qualsiasi indice scelto fra $1, 2, \dots, n$. Questa espressione viene detta "sviluppo di Laplace del determinante di A secondo la colonna $j-$ma."

La definizione di determinante e' consistente, in quanto si dimostra che

Teorema 1 *Tutti gli sviluppi di Laplace del determinante di una matrice quadrata rispetto alle sue varie colonne danno lo stesso risultato.*

3. La definizione di determinante data ora e' coerente con la definizione di determinante data nella lezione scorsa per le matrici quadrate di ordine 2. Infatti:

   lo sviluppo di Laplace secondo la prima colonna porge

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \varepsilon_{11} a_{11} M_{11} + \varepsilon_{21} a_{21} M_{21} = +a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12},$$

   e lo sviluppo di Laplace secondo la seconda colonna porge

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \varepsilon_{12} a_{12} M_{12} + \varepsilon_{22} a_{22} M_{22} = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}.$$

   I due sviluppi sono uguali per la proprieta' commutativa dei numeri reali.

4. Passiamo ora alle matrici quadrate del terzo ordine.

   Consideriamo ad esempio la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

   Gli sviluppi del suo determinate sono:

   rispetto alla prima colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 10 - 8 \cdot 6 - 4(2 \cdot 10 - 8 \cdot 3) + 7(2 \cdot 6 - 5 \cdot 3)$$
$$= 2 - 4(-4) + 7(-3) = -3;$$

   rispetto alla seconda colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(4 \cdot 10 - 7 \cdot 6) + 5(1 \cdot 10 - 7 \cdot 3) - 8(1 \cdot 6 - 4 \cdot 3)$$
$$= -2(-2) + 5(-11) - 8(-6) = -3;$$

rispetto alla terza colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = +3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) - 6(1 \cdot 8 - 7 \cdot 2) + 10(1 \cdot 5 - 4 \cdot 2)$$
$$= 3(-3) - 6(-6) + 10(-3) = -3.$$

5. Il determinate della generica matrice quadrata del terzo ordine,

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix},$$

sviluppato rispetto alla prima colonna, e'

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$
$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

Abbiamo ottenuto un polinomio nelle nove variabili a_i, b_j, c_k, osserviamo che: e' omogeneo di terzo grado; e' somma con segni di termini del tipo $a_ib_jc_k$; le terne di indici (i, j, k) variano fra tutte le permutazioni

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1)$$

della terna $(1, 2, 3)$. Gli sviluppi rispetto alle altre colonne danno lo stesso polinomio, scritto in altro modo.

6. Consideriamo ora, fra le matrici del terzo ordine, quelle a scala.

L'unica matrice a scala di rango 0 e' la matrice nulla, che ha determinante 0. Le matrici a scala di rango 1 sono del tipo

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dove la prima riga non e' nulla; queste matrici hanno determinante 0. Le matrici a scala di rango 2 sono del tipo

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dove la prima riga e la seconda riga sono non nulle, e il pivot della seconda riga e' strettamente a destra del pivot della prima; queste matrici hanno determinante 0. Le matrici a scala di rango 3 sono del tipo

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix},$$

dove a_1, b_2, c_3 sono i pivot; il determinante e' dato da

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 \neq 0.$$

Abbiamo dunque visto che, per una matrice a scala del terzo ordine si ha: se il rango della matrice e' minore di 3, allora il suo determinante e' 0, se il rango della matrice e' 3, allora il suo determinante e' uguale al prodotto dei suoi pivot, dunque diverso da 0.

7. La generica matrice a scala di ordine n e' del tipo

$$\begin{bmatrix} d_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & d_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix},$$

con le dovute condizioni sui pivot delle righe. Sviluppando i determinanti sempre rispetto alla prima colonna si ha

$$\begin{vmatrix} d_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & d_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{vmatrix} =$$

$$= d_1 \begin{vmatrix} d_2 & * & \dots & * \\ 0 & d_3 & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \begin{vmatrix} d_3 & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{vmatrix} = \dots = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

Dunque, se S e' una matrice quadrata di ordine n, a scala con elementi diagonali $d_1, \dots, d_n$, allora

$$|S| = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

Osserviamo che:

se $r(S) < n$, allora $d_n = 0$ e dunque $|S| = 0$;

se $r(S) = n$, allora $d_1, \dots, d_n \neq 0$ e dunque $|S| \neq 0$.

8. **Proprieta' rispetto alle righe**

   Una matrice quadrata di ordine n puo' essere riguardata come una colonna di n righe, ciascuna con n componenti scalari

$$\begin{bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \\ r'_n \end{bmatrix}.$$

   Cosi', il determinante di una matrice quadrata di ordine n, che e' appunto una funzione di una variabile matrice quadrata di ordine n, puo' essere riguardato come una funzione di n variabili vettoriali in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \\ r'_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \\ r'_n \end{vmatrix}.$$

   In quest'ottica, le proprieta' salienti del detrminante sono le seguenti.

   - se tre matrici A, B, C di ordine n sono in tutto uguali, tranne che nella riga $i-$ma, e se la riga $i-$ma di A e' la somma della riga $i-$ma di B con la riga $i-$ma di C, allora $|A| = |B| + |C|$; in altri termini,

$$\begin{vmatrix} r'_1 \\ \vdots \\ s'_i + t'_i \\ \vdots \\ r'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r'_1 \\ \vdots \\ s'_i \\ \vdots \\ r'_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r'_1 \\ \vdots \\ t'_i \\ \vdots \\ r'_n \end{vmatrix};$$

   - se due matrici A, B di ordine n sono in tutto uguali, tranne che nella riga $i-$ma, e se la riga $i-$ma di A e' il prodotto di uno scalare α per la riga $i-$ma di B, allora $|A| = \alpha|B|$; in altri termini,

$$\begin{vmatrix} r'_1 \\ \vdots \\ \alpha r'_i \\ \vdots \\ r'_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} r'_1 \\ \vdots \\ r'_i \\ \vdots \\ r'_n \end{vmatrix};$$

   - se A e B sono matrici di ordine n che differiscono fra loro solo per uno scambio di righe, allora $|A| = -|B|$; in altri termini,

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ s' \\ \vdots \\ t' \\ \vdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vdots \\ t' \\ \vdots \\ s' \\ \vdots \end{vmatrix};$$

se una matrice A ha due righe uguali, allora $|A| = 0$; in altri termini,

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ s' \\ \vdots \\ s' \\ \vdots \end{vmatrix} = 0.$$

Non dimostriamo queste proprieta'.

9. Siamo ora in grado di stabilire l'effetto che le operazioni elementari sulle righe $r'_1, \ldots, r'_n$ della generica matrice A quadrata di ordine n hanno sul determinante di A.

   - moltiplicare una riga di A per uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ ha per effetto moltiplicare il determinate di A per α;
   - scambiare due righe di A ha per effetto cambiare segno al determinante di A;
   - sommare ad una riga di A un multiplo scalare di un'altra riga di A non ha alcun effetto sul determinante di A, lo lascia invariato. Per semplicita' di scrittura, verifichiamo che sommare alla seconda riga di A un multiplo scalare della prima riga di A non ha alcun effetto sul determinante di A :

$$\begin{vmatrix} r'_1 \\ r'_2 + \alpha r'_1 \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r'_1 \\ \alpha r'_1 \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} r'_1 \\ r'_1 \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \end{vmatrix};$$

Dunque possiamo usare l'algoritmo di Gauss per calcolare il determinante di una matrice numerica. Ad esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

10. Siamo ora nella posizione di stabilire e provare la relazione fra rango e determinante di una matrice quadrata.

    Teorema 2 *Una matrice A quadrata di ordine n ha rango massimo n se e solo se il suo determinante e' diverso da 0:*

    $$r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$

    Dim. Applichiamo ad A l'algoritmo di Gauss, ed otteniamo una matrice a scala S. Le operazioni elementari lasciano invariato il rango di una matrice, dunque il rango di A e' n se e solo se il rango di S e' n.

    Ora, il rango della una matrice a scala S e' n se e solo se il deteriminante di S e' diverso da 0.

    Applichiamo ad S le operazioni elementari inverse in ordine inverso, ed otteniamo A. Le operazioni elementari lasciano invariato l'annullarsi/non_annullarsi del determinante, dunque il determinante di S e' diverso da 0 se e solo se il determinate di A e' diverso da 0.

    Riassumendo:

    $$r(A) = n \Leftrightarrow r(S) = n \Leftrightarrow |S| \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0;$$

    dunque

    $$r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$

11. **Trasposizione, sviluppi per righe**

    Nella prima parte del corso si e' visto il rilevante teorema secondo il quale il rango per righe di una matrice e' uguale al suo rango per colonne; in altri termini, il rango di una matrice e' uguale al rango della matrice trasposta. Un teorema analogo vale per il determinante

    Teorema 3 *Il determinante di una matrice quadrata A e' uguale al determinate della matrice trasposta A^T :*

    $$|A| = |A^T|.$$

    Questo teorema e' ovvio per le matrici di ordine 1, immediato per le matrici di ordine 2, dimostrabile direttamente per le matrici di ordine 3; nel caso generale, puo' essere dimostrato riconducendosi al caso delle matrici a scala, ed usando il teorema sulla equivalenza degli sviluppi di Laplace per colonne; non diamo la dimostrazione.

    Per questo teorema, il determinante di una matrice A quadrata di ordine n puo' essere definito anche come il numero reale ottenuto sommando i prodotti degli elementi di una riga di A per i rispettivi complementi algebrici, pesati con i segni dati dagli ε. Precisamente:

    $$|A| = \varepsilon_{i1}a_{i1}M_{i1} + \varepsilon_{i2}a_{i2}M_{i2} + \cdots + \varepsilon_{in}a_{in}M_{in}$$

dove i e' un qualsiasi indice scelto fra $1, 2, \ldots, n$. Questa espressione viene detta "sviluppo di Laplace del determinante di A secondo la riga $i-$ma". In definitiva, si ha che tutti gli sviluppi di Laplace del determinante di una matrice quadrata, rispetto alle varie righe ed alle varie colonne danno lo stesso risultato.

12. **Proprieta' rispetto alle colonne**

Una matrice quadrata di ordine n puo' essere riguardata come una riga di n colonne, ciascuna con n componenti scalari

$$[c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n]\,.$$

Cosi', il determinante di una matrice quadrata di ordine n, che e' appunto una funzione di una variabile matrice quadrata di ordine n, puo' essere riguardato come una funzione di n variabili vettoriali in $\mathbb{R}^n$

$$[c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n] \mapsto |c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n|\,.$$

In quest'ottica, le proprieta' salienti del determinante sono le seguenti.

- se tre matrici A, B, C di ordine n sono in tutto uguali, tranne che nella colonna $j-$ma, e se la colonna $j-$ma di A e' la somma della colonna $j-$ma di B con la colonna $j-$ma di C, allora $|A| = |B| + |C|$; in altri termini,

$$|c_1,\ \ldots,\ f_j + g_j,\ \ldots,\ c_n| = |c_1,\ \ldots,\ f_j,\ \ldots,\ c_n| + |c_1,\ \ldots,\ g_j,\ \ldots,\ c_n|\,;$$

- se due matrici A, B di ordine n sono in tutto uguali, tranne che nella colonna $j-$ma, e se la colonna $j-$ma di A e' il prodotto di uno scalare α per la colonna $j-$ma di B, allora $|A| = \alpha|B|$; in altri termini,

$$|c_1,\ \ldots,\ \alpha c_j,\ \ldots,\ c_n| = \alpha\,|c_1,\ \ldots,\ c_j,\ \ldots,\ c_n|\,;$$

- se A e B sono matrici di ordine n che differiscono fra loro solo per uno scambio di colonne, allora $|A| = -|B|$; in altri termini,

$$|\ldots,\ g,\ \ldots,\ f,\ \ldots| = -\,|\ldots,\ f,\ \ldots,\ g,\ \ldots|\,;$$

  se una matrice A ha due colonne uguali, allora $|A| = 0$; in altri termini,

$$|\ldots,\ f,\ \ldots,\ f,\ \ldots| = 0.$$

Queste proprieta' del determinante rispetto alle colonne, per il teorema della sezione precedente, seguono dalle proprieta' del determinante rispetto alle righe.

13. **Sistemi lineari**

Teorema 4 *Sia A una matrice quadrata di ordine n, e $b \in \mathbb{R}^n$.*

- *il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ ha solo la soluzione banale $x = 0$ se e solo se $|A| \neq 0$.*
- *il sistema lineare $Ax = b$ ha una ed una sola soluzione se e solo se $|A| \neq 0$.*

Dim. Dimostriamo la seconda parte dell'enunciato; la prima e' una sua conseguenza. Consideriamo la matrice completa $[A|b]$ associata al sistema $Ax = b$, applichiamo l'algoritmo di Gauss, ed otteniamo una matrice a scala $[S|c]$, associata al sistema a scala $Sx = c$. Ora: il sistema $Ax = b$ ha una ed una sola soluzione se e solo se il sistema $Sx = c$ ha una ed una sola soluzione; il sistema $Sx = c$ ha una ed una sola soluzione se e solo se il determinante di S e' diverso da 0; il determinante di S e' diverso da zero se e solo se il determinante di A e' diverso da 0. Dunque, il sistema $Ax = b$ ha una ed una sola soluzione se e solo se $|A| \neq 0$.

La regola di Cramer si estende dal caso $n = 2$ al caso generale.

Teorema 5 *Sia dato un sistema lineare di n equazioni nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$,*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad \textit{in breve} \qquad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

dove $a_1, \ldots, a_n, b$ sono le colonne dei coefficienti e la colonna dei termini noti. Sotto la condizione

$$|a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n| \neq 0,$$

il sistema ha una ed una sola soluzione, data da

$$x_i = \frac{|a_1,\ \ldots,\ b\ ,\ \ldots,\ a_n|}{|a_1,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots,\ a_n|}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dim. Sia i un indice fissato fra $1, 2 \ldots, n$. L'uguaglianza fra vettori colonna

$$\sum_{j=1}^{n} a_jx_j = b$$

implica l'uguaglianza fra le matrici ottenute dalla matrice dei coefficienti $[a_1,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots,\ a_n]$ sostituendo alla colonna $i-$ma da una parte la colonna $\sum_1^n a_jx_j$ e dall'altra la colonna b :

$$\left[a_1,\ \ldots,\ \sum_{j=1}^{n} a_jx_j,\ \ldots,\ a_n\right] = [a_1,\ \ldots,\ b\ ,\ \ldots,\ a_n]\,.$$

Questa uguaglianza fra matrici implica l'uguaglianza fra i loro determinanti:

$$\left| a_1,\ \dots,\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j,\ \dots,\ a_n \right| = |a_1,\ \dots,\ b\ ,\ \dots,\ a_n| \,.$$

Applicando le proprieta' dei determinanti, il primo membro puo' essere riscritto

$$\begin{aligned} \left| a_1,\ \dots,\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j,\ \dots,\ a_n \right| &= \sum_{j=1}^{n} |a_1,\ \dots,\ a_j x_j,\ \dots,\ a_n| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |a_1,\ \dots,\ a_j,\ \dots,\ a_n|\, x_j \\ &= |a_1,\ \dots,\ a_i,\ \dots,\ a_n|\, x_i; \end{aligned}$$

l'ultimo passaggio deriva dal fatto che per $j \neq i$ nella matrice

$[a_1,\ \dots,\ a_j,\ \dots,\ a_n]$

la colonna $i-$ e la colonna $j-$ma sono uguali, cosi'

$|a_1,\ \dots,\ a_j,\ \dots,\ a_n| = 0.$

Dunque si ha l'equazione

$$|a_1,\ \dots,\ a_i,\ \dots,\ a_n|\, x_i = |a_1,\ \dots,\ b\ ,\ \dots,\ a_n|$$

dalla quale, essendo $|a_1,\ \dots,\ a_i,\ \dots,\ a_n| \neq 0$, si ricava

$$x_i = \frac{|a_1,\ \dots,\ b\ ,\ \dots,\ a_n|}{|a_1,\ \dots,\ a_i,\ \dots,\ a_n|}.$$

14. **Interpolazione, determinante di Vandermonde**

Sia dato un fenomeno descritto da due variabili x e y, e siano date n osservazioni (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_n, y_n). Supposto che la variabile y dipenda dalla variabile x, si cerca una funzione $y = f(x)$ che sia compatibile con le osservazioni, cioe' tale che $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ... $y_n = f(x_n)$. Un primo modo di affrontare il problema e' cercare la funzione f fra le funzioni polinomiali di grado $n-1$

$$f(x) = c_0 + c_1 x + +c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}.$$

Imponendo le condizioni di compatibilita' con le osservazioni, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y_1 = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \cdots + c_{n-1} x_1^{n-1} \\ y_2 = c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \cdots + c_{n-1} x_2^{n-1} \\ \vdots \\ y_n = c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \cdots + c_{n-1} x_n^{n-1} \end{cases}$$

di n equazioni lineari nelle n incognite $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$.
Il determinante della matrice dei coefficienti e'

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

viene detto determinante di Vandermonde di ordine n.
Per $n = 2$ abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

Per $n = 3$ abbiamo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ 0 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

In generale, si prova che

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq h > k \geq 1} (x_h - x_k).$$

Per il teorema sui sistemi lineari e i determinanti, abbiamo dunque che

> *Sotto le condizioni*
> $x_h \neq x_k, \qquad \forall h \neq k,$
> *il polinomio cercato esiste ed e' unico.*

I coefficienti del polinomio possono essere ricavati con la regola di Cramer.