Geometria e Algebra (II), 04.12.12

1. Esercizio. Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Determiniamo prima gli autovalori di A. Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico di A, cioe' le soluzioni dell'equazione

$$\det(A - \lambda I_3) = 0$$

nell'incognita λ. Il polinomio caratteristico di A e' il determinante

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{bmatrix};$$

lo sviluppiamo rispetto alla prima colonna

$$= (1-\lambda)((-1-\lambda)(-3-\lambda)+2) - (-(-3-\lambda)+2)$$
$$= (1-\lambda)(5+4\lambda+\lambda^2) - (5+\lambda)$$
$$= -2\lambda - 3\lambda^2 - \lambda^3.$$

Dunque gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = 0,$$

che sono

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -2.$$

Per ogni autovalore, determiniamo l'autospazio associato.

L'autospazio V_0 e' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$Ax = 0x,\ \text{cioe'} Ax = 0_3;$$

essendo il sistema omogeneo, possiamo limitarci a considerare la matrice dei coefficienti e applicare ad essa l'algoritmo di Gauss,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

a questa matrice dei coefficienti corrisponde il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ \quad\ \ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases};$$

ricaviamo x_1 e x_2 in funzione di x_3, e otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = 5x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases};$$

le soluzioni sono del tipo

$$\begin{bmatrix} 5r \\ 3r \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} r,$$

dove r varia liberamente in $\mathbb{R}$. Dunque l'autospazio V_0 e' il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore

$$u = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix};$$

V_0 e' un sottospazio di dimensione 1, i suoi vettori descrivono una retta per l'origine di $\mathbb{R}^3$.

L'autospazio V_{-1} e' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$Ax = -x, \text{ cioe'}(A + I_3)x = 0_3;$$

essendo il sistema omogeneo, possiamo limitarci a considerare la matrice dei coefficienti e applicare ad essa l'algoritmo di Gauss,

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

a questa matrice dei coefficienti corrisponde il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 2x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases};$$

ricaviamo x_1 e x_2 in funzione di x_3, e otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases};$$

le soluzioni sono del tipo

$$\begin{bmatrix} 2s \\ 2s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} s,$$

dove s varia liberamente in $\mathbb{R}$. Dunque l'autospazio V_{-1} e' il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

V_{-1} e' un sottospazio di dimensione 1, i suoi vettori descrivono una retta per l'origine di $\mathbb{R}^3$.

L'autospazio V_{-2} e' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$Ax = -2x, \text{ cioe'}(A + 2I_3)x = 0_3;$$

essendo il sistema omogeneo, possiamo limitarci a considerare la matrice dei coefficienti e applicare ad essa l'algoritmo di Gauss,

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

a questa matrice dei coefficienti corrisponde il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \end{cases};$$

ricaviamo x_1 e x_2 in funzione di x_3, e otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases};$$

le soluzioni sono del tipo

$$\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t,$$

dove t varia liberamente in $\mathbb{R}$.

Dunque l'autospazio V_{-2} e' il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

V_{-2} e' un sottospazio di dimensione 1, i suoi vettori descrivono una retta per l'origine di $\mathbb{R}^3$.

Ci chiediamo ora se tre autovettori u, v, w di A, che abbiamo scelto nei tre autospazi V_0, V_{-1}, V_{-2} di A, formano una base di $\mathbb{R}^3$; equivalentemente, ci chiediamo se u, v, w sono linearmente indipendenti, cioe' la matrice che li ammette come colonne

$$[u,\ v,\ w]$$

ha rango 3. Applicando l'algoritmo di Gauss otteniamo

$$[u,\ v,\ w] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

la matrice ha rango 3. Gli autovettori u, v, w formano una base di $\mathbb{R}^3$.

2. Negli esempi visti finora si e' sempre verificato che autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Non e' un caso.

   Teorema 1 *Sia A una matrice quadrata di ordine n, e siano $v_1, v_2, \ldots, v_p$ autovettori di A con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, rispettivamente. Se gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sono a due a due distinti, allora gli autovettori $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sono linearmente indipendenti.*

Dim. Dimostriamo il teorema per induzione su $p \geq 1$.

Sia $p = 1$. Abbiamo un autovettore v_1 di A, con autovalore λ_1 : cioe' $v_1 \neq 0_n$ e $Av_1 = \lambda_1 v_1$. Ora, per il semplice fatto che $v_1 \neq 0_n$, si ha che v_1 e' linearmente indipendente. Dunque in questo caso il teorema e' vero.

Sia $p \geq 2$. Supponiamo che il teorema sia vero per $p-1$, e mostriamo che il teorema e' vero per p. Abbiamo p autovettori v_i di A, con autovalori λ_i : cioe' $v_i \neq 0_n$ e $Av_i = \lambda_i v_i$; gli autovalori sono a due a due distinti: $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$. Consideriamo una combinazione lineare

$$(@) \qquad c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p = 0_n, \qquad (c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R})$$

di $v_1, v_2, \ldots, v_p$ il cui risultato e' il vettore nullo.

Moltiplichiamo entrambe i membri a sinistra per A

$$A(c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p) = A0_n;$$

al primo membro abbiamo $A(c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p) = c_1Av_1 + c_2Av_2 + \cdots + c_pAv_p = c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + \ldots + c_p\lambda_pv_p$, al secondo membro abbiamo $A0_n = 0_n$, cosi' abbiamo l'uguaglianza

$$(@') \qquad c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + \ldots + c_p\lambda_pv_p = 0_n.$$

Sottraiamo da questa uguaglianza $(@')$ la prima moltiplicata $(@)$ per λ_1,

$$c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + \ldots + c_p\lambda_pv_p - \lambda_1(c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p) = 0_n - \lambda_1 0_n,$$

e otteniamo

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \cdots + c_p(\lambda_p - \lambda_1)v_p = 0_n.$$

Per il fatto che i $p-1$ autovettori $v_2, \ldots, v_p$ sono associati a $p-1$ autovalori a due a due distinti $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$, e per l'ipotesi di induzione, abbiamo che gli autovettori $v_2, \ldots, v_p$ sono linearmente indipendenti; dunque si ha

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \cdots = c_p(\lambda_p - \lambda_1) = 0,$$

e poiche' $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ ..., $\lambda_p - \lambda_1 \neq 0$, si ha

$$c_2 = \cdots = c_p = 0.$$

Dunque l'uguaglianza $(@)$ diviene

$$c_1v_1 = 0_n;$$

Poiche' $v_1 \neq 0_n$ si ha $c_1 = 0$. Riassumendo, si ha

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0,$$

e cio' significa che $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sono linearmente indipendenti.

Questo teorema ha un'importante conseguenza:

Teorema 2 *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se A possiede n autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, e $v_1, \ldots, v_n$ sono autovettori corrispondenti, allora $v_1, \ldots, v_n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$.*

3. Esercizio. Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Determiniamo prima gli autovalori di A. Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico di A, cioe' le soluzioni dell'equazione

$$\det(A - \lambda I_3) = 0$$

nell'incognita λ. Il polinomio caratteristico e' il determinante

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 6 \\ 3 & 6 & 9-\lambda \end{bmatrix};$$

lo sviluppiamo rispetto alla prima colonna

$$= (1-\lambda)((4-\lambda)(9-\lambda) - 36) - 2(2(9-\lambda) - 18) + 3(12 - (4-\lambda)3)$$

$$= (1-\lambda)(-13\lambda + \lambda^2) - 2(-2\lambda) + 3(3\lambda)$$

$$= 14\lambda^2 - \lambda^3.$$

Dunque gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$\lambda^3 - 14\lambda^2 = 0,$$

che sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 14.$$

Per ogni autovalore, determiniamo l'autospazio associato.

L'autospazio V_0 e' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$Ax = 0x, \ \text{cioe'} Ax = 0_3;$$

essendo il sistema omogeneo, possiamo limitarci a considerare la matrice dei coefficienti e applicare ad essa l'algoritmo di Gauss,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

a questa matrice dei coefficienti corrisponde all'equazione lineare omogenea

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0;$$

ricaviamo x_1 in funzione di x_2 e x_3,

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3$$

le soluzioni sono del tipo

$$\begin{bmatrix} -2r - 3s \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s$$

dove r e s variano liberamente in $\mathbb{R}$. Dunque l'autospazio V_0 e' il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$u = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

V_0 e' un sottospazio di dimensione 2, i suoi vettori descrivono un piano per l'origine di $\mathbb{R}^3$.

L'autospazio V_{14} e' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$Ax = 14x, \text{ cioe'}(A - 14I_3)x = 0_3;$$

essendo il sistema omogeneo, possiamo limitarci a considerare la matrice dei coefficienti e applicare ad essa l'algoritmo di Gauss,

$$A - 14I_3 = \begin{bmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

a questa matrice dei coefficienti corrisponde il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ \quad\quad 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases};$$

ricaviamo x_1 e x_2 in funzione di x_3, e otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = 1/3x_3 \\ x_2 = 2/3x_3 \end{cases};$$

le soluzioni sono del tipo

$$\begin{bmatrix} (1/3)t \\ (2/3)t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} t,$$

dove t varia liberamente in $\mathbb{R}$. Dunque l'autospazio V_{14} e' il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore

$$w = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix};$$

V_{14} e' un sottospazio di dimensione 1, i suoi vettori descrivono una retta per l'origine di $\mathbb{R}^3$.

Ci chiediamo ora se i due autovettori u, v di A che abbiamo scelto nell'autospazio V_0 di A, e l' autovettore w di A che abbiamo scelto nell'autospazio V_{14} di A, formano una base di $\mathbb{R}^3$; equivalentemente, ci chiediamo se u, v, w sono linearmente indipendenti, cioe' la matrice che li ammette come colonne

$$[u, \; v, \; w]$$

ha rango 3. Applicando l'algoritmo di Gauss otteniamo

$$[u,\ v,\ w] = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 14/3 \end{bmatrix};$$

la matrice ha rango 3. Gli autovettori u, v, w formano una base di $\mathbb{R}^3$.

4. Esercizio. Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}.$$

Determiniamo prima gli autovalori di A. Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico di A, cioe' le soluzioni dell'equazione

$$\det(A - \lambda I_3) = 0$$

nell'incognita λ. Il polinomio caratteristico e' il determinante

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 14-\lambda \end{bmatrix};$$

lo sviluppiamo rispetto alla terza colonna

$$= (14-\lambda)((1-\lambda)(-1-\lambda)+1)$$
$$= (14-\lambda)\lambda^2.$$

Dunque gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$(14-\lambda)\lambda^2 = 0,$$

che sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 14.$$

Per ogni autovalore, determiniamo l'autospazio associato.

L'autospazio V_0 e' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$Ax = 0x,\ \text{cioe'} Ax = 0_3;$$

essendo il sistema omogeneo, possiamo limitarci a considerare la matrice dei coefficienti e applicare ad essa l'algoritmo di Gauss,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

a questa matrice dei coefficienti corrisponde il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ \qquad x_3 = 0 \end{cases};$$

le soluzioni sono del tipo

$$\begin{bmatrix} r \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

dove r varia liberamente in $\mathbb{R}$. Dunque l'autospazio V_0 e' il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

V_0 e' un sottospazio di dimensione 1, i suoi vettori descrivono una retta per l'origine di $\mathbb{R}^3$.

L'autospazio V_{14} e' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$Ax = 14x, \text{ cioe'}(A - 14I_3)x = 0_3;$$

essendo il sistema omogeneo, possiamo limitarci a considerare la matrice dei coefficienti e applicare ad essa l'algoritmo di Gauss,

$$A - 14I_3 = \begin{bmatrix} -13 & -1 & 0 \\ 1 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -15 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

a questa matrice dei coefficienti corrisponde il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - 15x_2 = 0 \\ \qquad\quad x_2 = 0 \end{cases};$$

le soluzioni sono del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t,$$

dove t varia liberamente in $\mathbb{R}$. Dunque l'autospazio V_{14} e' il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

V_{14} e' un sottospazio di dimensione 1, i suoi vettori descrivono una retta per l'origine di $\mathbb{R}^3$.

Ora, l'autovettore u di A che abbiamo scelto nell'autospazio V_0, e l' autovettore w di A che abbiamo scelto nell'autospazio V_{14}, non possono formare una base di $\mathbb{R}^3$. Di piu': l'autospazio V_0 ha dimensione 1, cosi' in V_0 non si puo' prendere piu' di un vettore linearmente indipendente; l'autospazio V_{14} ha dimensione 1, cosi' in V_{14} non si puo' prendere piu' di un vettore linearmente indipendente; in definitiva, si possono prendere due e non piu' di due autovettori di A linearmente indipendenti, dunque non esiste un insieme di autovettori di A che formi una base di $\mathbb{R}^3$

5. Ricordiamo ora alcune nozioni e fatti elementari sull'algebra dei polinomi.

   Consideriamo i polinomi in una variabile λ, a coefficienti in $\mathbb{R}$

   $$p(\lambda) = c_n\lambda^n + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0, \qquad c_i \in \mathbb{R}.$$

Ogni polinomio $p(\lambda)$ diverso dal polinomio nullo ha un suo grado $gr(p(\lambda))$, che e' un intero ≥ 0. Una soluzione dell'equazione $p(\lambda) = 0$ si dice "radice" del polinomio $p(\lambda)$.

Il Teorema di Ruffini afferma che se un polimomio $p(\lambda)$ di grado $n \geq 1$ ha una radice $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, allora il polinomio $p(\lambda)$ e' divisibile per il binomio $\lambda - \lambda_1$:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)p_1(\lambda),$$

dove $p_1(\lambda)$ e' un polinomio di grado $n-1$. Osserviamo che se $n \geq 2$ e il polinomio $p_1(\lambda)$ ha ancora la radice λ_1, allora $p_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)p_2(\lambda)$ dove $p_2(\lambda)$ e' un polinomio di grado $n-2$, e

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 p_2(\lambda).$$

Continuando, si arriva a scrivere

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m p_m(\lambda),$$

dove $p_m(\lambda)$ e' un polinomio di grado $n - m \geq 0$ che non ha radice λ_1, cioe' tale che $p(\lambda_1) \neq 0$. Diciamo allora che λ_1 e' una radice di "molteplicita' " m del polinomio $p(\lambda)$.

Iterando l'argomento su tutte le radici del polinomio $p(\lambda)$, si arriva a scrivere

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} q(\lambda),$$

dove $q(\lambda)$ e' un polinomio privo di radici reali, cioe' $q(\lambda) \neq 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definizione 1 *Sia A una matrice quadrata di ordine n (ad entrate reali), e sia $\mu \in \mathbb{R}$ un autovalore di A. Diciamo "molteplicita' algebrica" di μ ed indichiamo con $m_a(\mu)$ la molteplicita' di μ come radice del polinomio caratteristico di A; diciamo "molteplicita' geometrica" di μ ed indichiamo con $m_g(\mu)$ la dimensione dell'autospazio V_μ.*

In altri termini, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sono gli autovalori di A e se

$$\det(A - \lambda I_n) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} q(\lambda),$$

dove $q(\lambda)$ e' un polinomio privo di radici reali, da una parte abbiamo

$$m_a(\lambda_i) = m_i, \qquad i = 1, \ldots, r;$$

dall'altra abbiamo

$$m_g(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i} = \text{rango}\,(A - \lambda_i I_n)\,, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Osserviamo che la molteplicita' geometrica degli autovalori e' sempre maggiore-uguale a 1. Osserviamo inoltre che negli esempi considerati la molteplicita' geometrica degli autovalori non supera mai la molteplicita' algebrica. Non e' un caso.

Teorema 3 *Sia A una matrice quadrata di ordine n (ad entrate reali), e sia $\mu \in \mathbb{R}$ un suo autovalore. La molteplicita' geometrica di μ e' minore-uguale alla molteplicita' algebrica di μ :*

$$m_g(\mu) \leq m_a(\mu).$$

Non diamo la dimostrazione.

6. Siamo ora nella posizione di caratterizzare le matrici A quadrate di ordine n che hanno n autovettori che formano una base di $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4 *Sia A una matrice quadrata di ordine n (ad entrate reali). A possiede n autovettori che formano una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se sono soddisfatte entrambe le condizioni*

(a) il polinomio caratteristico di A si fattorizza completamente su $\mathbb{R}$:

$$\mathit{det}\,(A - \lambda I_n) = \varepsilon(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}, \qquad (\varepsilon = \pm 1);$$

(b) per ogni autovalore di A, la molteplicita' geometrica e' uguale alla molteplicita' algebrica:

$$\mathit{dim}\,(V_{\lambda_i}) = m_i, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Dim. Proviamo solo una parte del teorema, cioe' che se sono soddisfatte le condizioni (a) e (b) allora A possiede n autovettori che formano una base di $\mathbb{R}^n$. Per ogni $i = 1, 2, \ldots, r$, nell'autospazio V_{λ_i} prendiamo una base $v_{i1}, v_{i2}, \ldots,$ e consideriamo i vettori

$(*) \qquad v_{11}, v_{12}, \ldots;\ v_{21}, v_{22}, \ldots;\ \ldots v_{r1}, v_{r2}, \ldots$

presi nei vari autospazi. Il numero di questi vettori e'

$\sum_1^r \dim\,(V_{\lambda_i}) = \sum_1^r m_i = n$

(il primo passaggio vale per la condizione (b), il secondo per la (a)).

Per costruzione, per ciascun $i = 1, 2, \ldots, n$, gli autovettori $v_{i1}, v_{i2}, \ldots$ presi nell'autospazio V_{λ_i} sono linearmente indipendenti; usando il teorema sull'indipendenza lineare di autovettori associati ad autovalori distinti, si puo' provare che gli n autovettori $(*)$ presi nei vari autospazi sono linearmente indipendenti (non sviluppiamo questo aspetto). Dunque questi n autovettori formano una base di $\mathbb{R}^n$.

La dimostrazione dell'altra parte del teorema, cioe' che se A possiede n autovettori che formano una base di $\mathbb{R}^n$, allora sono soddisfatte le condizioni (a) e (b), si basa sul teorema del paragrafo precedente.