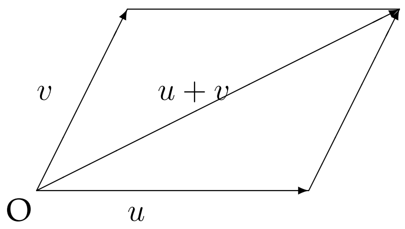
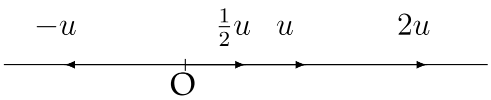
Geometria e Algebra (II), 10.12.12

1. Consideriamo il piano della geometria euclidea, intuitivamente inteso, e sia O un punto fissato in esso. Sull'insieme $\mathfrak{P}_O$ dei vettori del piano applicati nel punto O sono definite un'operazione di somma, mediante la regola del parallelogramma,

   ed un'operazione di moltiplicazione per scalari reali

   L'insieme $\mathfrak{P}_O$ dotato di queste due operazioni e' uno spazio vettoriale reale, che diciamo "piano vettoriale geometrico con origine in O", ed indichiamo con lo stesso simbolo $\mathfrak{P}_O$.

2. **Ortogonalita' nel piano.**

   Fissato nel piano un punto O, consideriamo il piano vettoriale $\mathfrak{P}_O$. Diamo per intuitivamente nota la nozione di ortogonalita' fra due vettori non nulli. Per convenzione, stabiliamo che il vettore nullo sia ortogonale ad ogni altro vettore. Dati due vettori $v, w \in \mathfrak{P}_O$, scriveremo

   $$v \perp w$$

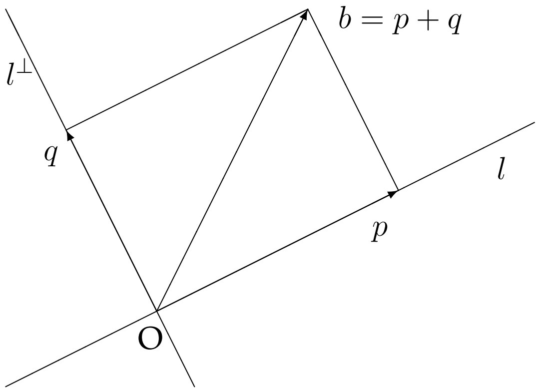
   per indicare che v e w sono ortogonali.

   Osserviamo che i vettori ortogonali a un dato vettore $v \neq 0$ descrivono una retta per O.

   Data una retta l per O, sia $l^\perp$ la retta per O ortogonale ad l. Ogni vettore $b \in \mathfrak{P}_O$ si puo' scomporre in uno ed un solo modo come somma di un vettore p sulla retta l ed un vettore q sulla retta $l^\perp$

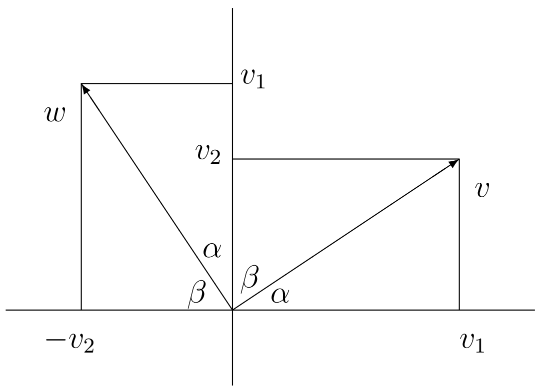
   $$\begin{aligned} &b = p + q \\ &p \in l \\ &q \in l^\perp \end{aligned}$$

Diciamo che p e' la *proiezione ortogonale* di b su l, e che q e' la *proiezione ortogonale* di b su $l^\perp$.



3. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, identifichiamo il piano vettoriale $\mathfrak{P}_O$ con $\mathbb{R}^2$.

   Dato un vettore $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, ci sono un paio di scelte psicologicamente naturali per un vettore ortogonale a v, una delle quali e' $w = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$.



   La scelta e' corretta. Informalmente, si puo' osservare che si vengono a formare quattro triangoli rettangoli uguali, l'angolo formato dai vettori v e w e' $\alpha + \beta$, ma $\alpha + \beta$ e' anche l'angolo formato dai due assi coordinati, che e' retto.

   I vettori ortogonali al vettore v sono tutti e soli quelli del tipo

$$wr = \begin{bmatrix} -v_2 r \\ v_1 r \end{bmatrix},$$

   dove r e' uno scalare qualsiasi.

   Osserviamo che la somma dei prodotti delle componenti del vettore v per le corrispondenti componenti del vettore wr e' sempre nulla:

$$v_1 \cdot (-v_2 r) + v_2 \cdot (v_1 r) = 0, \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Per ogni coppia di vettori $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$a \perp b \qquad \textit{se e solo se} \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Ora,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a'b.$$

Sinteticamente, abbiamo dunque che

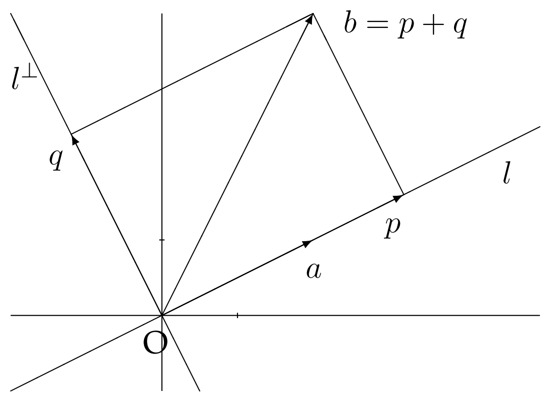
$$a \perp b \quad \textit{se e solo se} \quad a'b = 0.$$

4. Vediamo ora come la costruzione della proiezione ortogonale di un vettore $b \in \mathfrak{P}_O$ su una retta l per O si possa effettuare algebricamente. Possiamo descrivere la retta l come l'insieme dei vettori multipli scalari di un vettore non nullo a :

$$l = \{ar;\ r \in \mathbb{R}\},$$

e la retta $l^\perp$ come l'insieme dei vettori ortogonali al vettore a :

$$l^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ a'x = 0\}.$$



Per fissare le idee, faremo riferimento al caso concreto

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Cerchiamo dunque due vettori p, q che soddisfino le condizioni

$$\begin{aligned} b &= p + q \\ p &= ar, \qquad r \in \mathbb{R} \\ a'q &= 0, \end{aligned}$$

dove r e' uno scalare incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$b = ar + q,$$

e moltiplicando a sinistra per a' entrambe i membri si ha

$$a'b = a'(ar + q),$$

cioe'

$$a'b = a'a\, r + a'q,$$

da cui, per la terza condizione, si ha

$$a'b = a'a\, r,$$

o

$$a'a\, r = a'b.$$

Ora, questa e' un'equazione lineare nell'incognita r, e il coefficiente $a'a$ e' diverso da 0 in quanto a e' diverso dal vettore nullo. Si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$r = \frac{a'b}{a'a},$$

dalla quale si ottiene

$$p = ar = a\frac{a'b}{a'a}.$$

Nel nostro caso, si ha

$p = ar,$

dove

$r = \frac{a'b}{a'a} = \dfrac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{8}{5};$

dunque

$p = ar = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{8}{5} = \begin{bmatrix} 3.2 \\ 1.6 \end{bmatrix}.$

5. Consideriamo lo spazio della geometria euclidea, intuitivamente inteso, e sia O un punto fissato in esso. Sull'insieme $\mathfrak{S}_O$ dei vettori dello spazio applicati nel punto O sono definite un'operazione di somma, mediante la regola del parallelogramma, ed un'operazione di moltiplicazione per scalari reali. L'insieme $\mathfrak{S}_O$ dotato di queste due operazioni e' uno spazio vettoriale reale, che diciamo "spazio vettoriale geometrico con origine in O", ed indichiamo con lo stesso simbolo $\mathfrak{S}_O$.

6. **Ortogonalita' nello spazio**

   Fissato nello spazio un punto O, consideriamo lo spazio vettoriale $\mathfrak{S}_O$. Diamo per intuitivamente nota la nozione di ortogonalita' fra due vettori non nulli. Per convenzione, stabiliamo che il vettore nullo sia ortogonale ad ogni altro vettore. Dati due vettori $v, w \in \mathfrak{S}_O$, scriveremo

   $$v \perp w$$

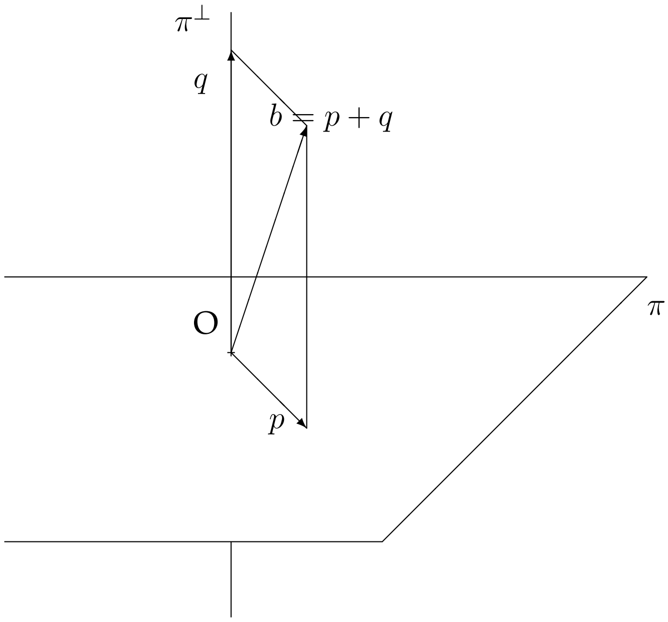
   per indicare che v e w sono ortogonali.

   Osserviamo che i vettori ortogonali a un dato vettore $v \neq 0$ descrivono un piano, e che i vettori ortogonali a due dati vettori v, w non allineati descrivono una retta.

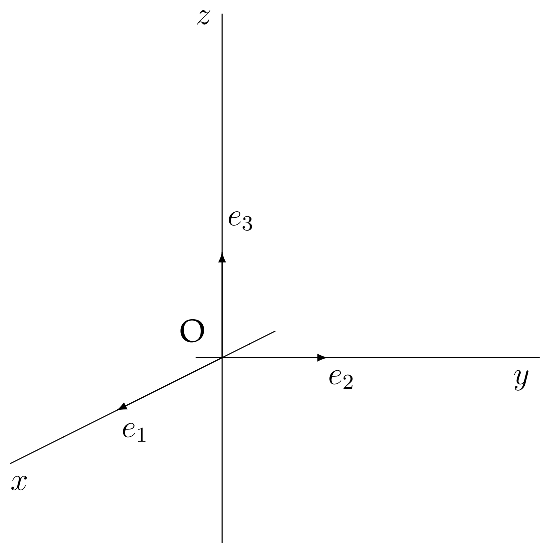
   Dato un piano π per O, sia $\pi^\perp$ la retta per O ortogonale a π. Ogni vettore $b \in \mathfrak{S}_O$ si puo' scomporre in uno ed un solo modo come somma di un vettore p sul piano π ed un vettore q sulla retta $\pi^\perp$

   $$\begin{aligned} &b = p + q \\ &p \in \pi \\ &q \in \pi^\perp \end{aligned}$$

   Diciamo che p e' la proiezione ortogonale di b sul piano π, e che q e' la proiezione ortogonale di b sulla retta $\pi^\perp$.



7. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, identifichiamo lo spazio vettoriale $\mathfrak{S}_O$ con $\mathbb{R}^3$.



Si puo' provare che due vettori $a = [a_i]_{i=1}^3$ e $b = [b_i]_{i=1}^3$ sono ortogonali se e solo se la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti e' nulla:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

Ora,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a'b.$$

Sinteticamente, abbiamo dunque ancora che

$$a \perp b \quad \textit{se e solo se} \quad a'b = 0.$$

Noi sappiamo che, per costruzione, i vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono a due a due ortogonali. Cio' si ritrova anche algebricamente, in quanto

$e_1'e_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0,$

$e_1'e_3 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0,$

$e_2'e_3 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$

Possiamo anche ritrovare che i vettori che stanno sul piano xy sono ortogonali ai vettori che stanno sull'asse z. Infatti, i primi sono del tipo $a = [a_i]_{i=1}^3$ con $a_3 = 0$, i secondi sono del tipo $b = [b_i]_{i=1}^3$ con $b_1 = b_2 = 0$, e si ha

$a'b = a_1 0 + a_2 0 + 0 b_3 = 0.$

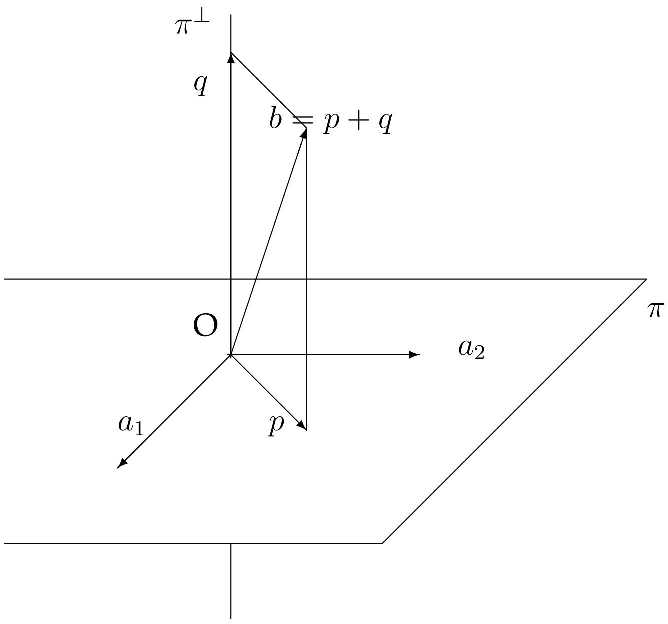
8. Vediamo ora come la costruzione della proiezione ortogonale di un vettore $b \in \mathfrak{S}_O$ su un piano π per O si possa effettuare algebricamente.

   Possiamo descrivere il piano π come l'insieme dei vettori combinazioni lineari di due vettori non allineati a_1, a_2 :

$$\pi = \{a_1r_1 + a_2r_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}\},$$

e la retta $\pi^\perp$ come l'insieme dei vettori ortogonali ai vettori a_1, a_2 :

$$\pi^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ a_1' x = 0, \ a_2' x = 0\}.$$



Prima di procedere, conviene rappresentare il piano π e la retta $\pi^\perp$ in un modo piu' sintetico. Osserviamo che le combinazioni lineari $a_1 r_1 + a_2 r_2$ dei vettori a_1 e a_2 si possono scrivere nella forma

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix},$$

e che le condizioni di ortogonalita' $a_1' x = 0, \ a_2' x = 0$ ai vettori a_1, a_2 si possono riscrivere nella forma

$$\left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline a_2' \end{array} \right] x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Percio', posto $A = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array} \right]$, ed osservato che $\left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline a_2' \end{array} \right] = A^T$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \pi &= \{Ar; \ r \in \mathbb{R}^2\}, \\ \pi^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^3 : \ A^T x = 0_2\}. \end{aligned}$$

Cerchiamo dunque due vettori p, q che soddisfino le condizioni:

$$\begin{aligned} b &= p + q \\ p &= Ar, \qquad r \in \mathbb{R}^2 \\ A^T q &= 0, \end{aligned}$$

dove $r \in \mathbb{R}^2$ e' un vettore incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$b = Ar + q,$$

e moltiplicando a sinistra per A^T entrambe i membri si ha

$$A^T b = A^T(Ar + q),$$

cioe'

$$A^T b = A^T A\, r + A^T q,$$

da cui, per la terza condizione, si ha

$$A^T b = A^T A\, r,$$

o

$$A^T A\, r = A^T b.$$

Ora, si puo' provare che la matrice quadrata $A^T A$ risulta essere invertibile, in quanto le colonne di A sono linearmente indipendenti. Si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$r = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b,$$

dalla quale si ottiene

$$p = Ar = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T b.$$

Esempio. Nello spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{S}_O$, identificato con $\mathbb{R}^3$ mediante un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, siano dati i vettori

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il vettore proiezione ortogonale di b sul piano generato da a_1 e a_2 e' dato da

$$p = a_1 r_1 + a_2 r_2 = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = Ar$$

dove

$$r = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 \\ 7/9 \end{bmatrix}.$$

Dunque

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1/9 + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} 7/9 = \begin{bmatrix} 1/9 \\ 14/9 \\ 8/9 \end{bmatrix}.$$

Prodotto scalare e ortogonalita' in $\mathbb{R}^n$.

1. **Prodotto scalare**

   Definizione 1 *Diciamo prodotto scalare di due vettori $a = [a_i]_1^n$ e $b = [b_i]_1^n$ di $\mathbb{R}^n$, ed indichiamo con $a \cdot b$, il numero reale dato dalla somma dei prodotti delle componenti corrispondenti dei due vettori*

   $$a \cdot b = a'b = \sum_1^n a_i b_i.$$

   Osserviamo che il prodotto scalare di in vettore con se' stesso e' la somma dei quadrati delle sue componenti:

   $$a \cdot a = \sum_1^n a_i^2.$$

   Dalle proprieta' delle operazioni nell'algebra delle matrici discendono le seguenti proprieta' del prodotto scalare:

   $$\begin{gathered} a \cdot b = b \cdot a \\ (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (ra) \cdot b = r(a \cdot b) \qquad a \cdot (rb) = r(a \cdot b) \end{gathered}$$

   per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$. Inoltre,

   $$a \cdot a \geq 0, \qquad a \cdot a = 0 \text{ se e solo se } a = 0_n.$$

2. **Ortogonalita'**

   Definizione 2 *Siano a e b due vettori di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che a e' ortogonale a b, e scriviamo $a \perp b$ se il prodotto scalare di a per b e' nullo*

   $$a \perp b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \cdot b = 0.$$

   Dalle proprieta' del prodotto scalare derivano le seguenti proprieta' della relazione di ortogonalita'

- la relazione di ortogonalita' e' simmetrica:

$$a \perp b \qquad \Leftrightarrow \qquad b \perp a;$$

- il vettore nullo e' l'unico vettore di $\mathbb{R}^n$ ortogonale a se' stesso:

$$a \perp a \qquad \Leftrightarrow \qquad a = 0_n;$$

- se un vettore a e' ortogonale a ciascuno dei vettori $b, \dots, d$, allora a e' ortogonale anche ad ogni combinazione lineare di $b, \dots, d$:

$$a \perp b, \ \dots, \ a \perp d \qquad \Rightarrow \qquad a \perp (rb + \cdots + td), \qquad \forall r, \dots, t \in \mathbb{R}.$$

  Infatti da $a \cdot b = \ldots = a \cdot d = 0$ segue

$$a \cdot (rb + \cdots + td) = r(a \cdot b) + \cdots + t(a \cdot d) = r0 + \cdots + t0 = 0.$$

I vettori $e_1, \dots, e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ sono a due a due ortogonali:

$$e_h \perp e_k \qquad \forall h, k = 1, \dots, n, \quad h \neq k.$$

Cio' segue dal fatto che il prodotto della componente $i-$ma di e_h per la componente $i-$ma di e_k e' $= 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$: tale prodotto e' $0 \cdot 0 = 0$ per i diverso da h e k, e' $1 \cdot 0 = 0$ per $i = h$, ed e' $0 \cdot 1 = 0$ per $i = k$.

3. **Complemento ortogonale**

   Sia $S \subseteq R^n$ un sottinsieme di $\mathbb{R}^n$; l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ che sono ortogonali a ciascun vettore di S si dice "complemento ortogonale" di S, e si indica con $S^\perp$; in simboli:

$$\begin{aligned} S^\perp &= \{x \in R^n : \ s \perp x, \ \forall s \in S\} \\ &= \{x \in R^n : \ s \cdot x = 0, \ \forall s \in S\} \end{aligned}$$

   Osserviamo che $S^\perp$ e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Infatti, per ogni $u, v \in S^\perp$ e $r \in \mathbb{R}$ ed $s \in S$ si ha $s \cdot u = 0$ e $s \cdot v = 0$; ora

$$s \cdot (u + v) = s \cdot u + s \cdot v = 0; \quad s \cdot (ur) = (s \cdot u)r = 0r = 0,$$

   dunque $u + v \in S^\perp$ e $ru \in S^\perp$.

4. Per i sottinsiemi della base canonica $e_1, \dots, e_n$ di $\mathbb{R}^n$, la determinazione del complemento ortogonale e' particolarmente semplice.

   Determiniamo ad esempio in $\mathbb{R}^5$ il complemento ortogonale dell'insieme $\{e_1, \ e_2\}$. E' chiaro che a tale complemento ortogonale appartengono $e_3, \ e_4, e_5$. In effetti si ha

$$\{e_1, \ e_2\}^\perp = \langle e_3, \ e_4, \ e_5 \rangle \, .$$

   Lo verifichiamo. Sia $x = [x_i]_{i=1}^5$ un vettore di $\mathbb{R}^5$; possiamo scrivere $x = \sum_{i=1}^5 e_i x_i$. Ora, i prodotti scalari di e_1 ed e_2 con x sono

$e_1 \cdot x = e_1 \cdot \sum_{i=1}^5 e_i x_i = \sum_{i=1}^5 (e_1 \cdot e_i)\, x_i = x_1,$
$e_2 \cdot x = e_2 \cdot \sum_{i=1}^5 e_i x_i = \sum_{i=1}^5 (e_2 \cdot e_i)\, x_i = x_2;$

dunque x e' ortogonale ad e_1 e ad e_2 se e solo se $x_1 = x_2 = 0$, cioe' se e solo se x si puo' scrivere come $x = \sum_{i=3}^5 e_i x_i$.

In modo analogo si prova che per ciascun sottinsieme S dell'insieme $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$S^\perp = \langle S^c \rangle\,,$$

dove S^c e' l'insieme complementare di S in $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.