Geometria e Algebra (II), 11.12.12

1. **Complemento ortogonale di un vettore non nullo** Abbiamo visto che nel piano $\mathfrak{P}_O$ i vettori ortogonali ad un dato vettore non nullo descrivono una retta per O, e nello spazio $\mathfrak{S}_O$ i vettori ortogonali ad un dato vettore non nullo descrivono un piano per O. E' naturale chiedersi cosa sia in $\mathbb{R}^n$ il complemento ortogonale di in vettore non nullo.

   Sia $a = [a_i]_1^n$ un vettore in $\mathbb{R}^n$, con $a \neq 0_n$. Il complemento ortogonale $\{a\}^\perp$ dell'insieme $\{a\}$ e' l'insieme dei vettori $x = [x_i]_1^n$ in $\mathbb{R}^n$ tali che $a \perp x$, cioe' e' l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

   $$a \cdot x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

   Ora, questo insieme e' un sottospazio di dimensione $n-1$ in $\mathbb{R}^n$. Lo verifichiamo di seguito. Per semplicita' supponiamo $a_1 \neq 0$; possiamo cosi' ricondurci al caso $a_1 = 1$. Risolviamo l'equazione rispetto all'incognita x_1 :

   $$x_1 = -a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n;$$

   le soluzioni dell'equazione sono del tipo

   $$\begin{bmatrix} -a_2 t_2 - \cdots - a_n t_n \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} t_2 + \cdots + \begin{bmatrix} -a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} t_n = v_2 t_2 + \ldots + v_n t_n,$$

   $$= v_2 t_2 + \ldots + v_n t_n,$$

   dove i parametri $t_2, \ldots, t_n$ variano liberamente in $\mathbb{R}$. Dunque l'insieme delle soluzioni dell'equazione e' il sottospazio generato dagli $n-1$ vettori $v_2, \ldots, v_n$, si verifica che questi vettori sono linearmente indipendenti.

   In definitiva, il complemento ortogonale $\{a\}^\perp$ e' il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ che ha per base l'insieme $\{v_2, \ldots, v_n\}$, e

   $$\dim\{a\}^\perp = n - 1.$$

2. **Complemento ortogonale di un sottospazio di dimensione 1** Sia L un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, con $\dim L = 1$. Possiamo allora scrivere

   $$L = \langle a \rangle = \{ra;\ r \in \mathbb{R}\},$$

   dove a e' un qualsiasi elemento di L, con $a \neq 0_n$. Osserviamo che un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ e' ortogonale ad ogni vettore di L se e solo se x e' ortogonale ad a. Infatti: se x e' ortogonale ad ogni vettore di L, essendo a un vettore di L, si ha in particolare che x e' ortogonale ad a; d'altro canto per le proprieta' della relazione di ortogonalita', se x e' ortogonale ad a, allora x e' ortogonale ad ogni multiplo scalare ra di a, e questi multipli scalari di a sono esattamente gli elementi di L, cosi' x e' ortogonale ad ogni elemento di L.

   Abbiamo dunque che

   $$L^\perp = \{a\}^\perp.$$

3. **Proiezione ortogonale su un sottospazio di dimensione 1**

   La definizione di proiezione ortogonale di un vettore di $\mathbb{R}^2$ su un sottospazio di dimensione 1 (una retta per O) ammette la seguente estensione.

   Teorema 1 , e Definizione. *Sia L un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, con $dimL = 1$. Ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come*

   $$b = p + q,$$

   dove $p \in L$ e $q \in L^\perp$. Il vettore p si chiama "proiezione ortogonale" del vettore b sul sottospazio L, e si indica con $pr_L(b)$.

   La dimostrazione di questo teorema si puo' dedurre dal fatto che $\dim L + \dim L^\perp = n$; non la riportiamo.

   Cosi' come si e' ricavata una formula per la proiezione ortogonale di un vettore di $\mathbb{R}^2$ su un sottospazio di dimensione 1 (una retta per O), si ricava una formula, in un certo senso la stessa formula, per la proiezione ortogonale di un vettore di $\mathbb{R}^n$ su un sottospazio di dimensione 1.

   Teorema 2 *Sia L un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ con $dimL = 1$, sia $a \in L$ con $a \neq 0_n$, e sia $b \in \mathbb{R}^n$. La proiezione ortogonale di b su L e' data da*

   $$p = a\frac{a \cdot b}{a \cdot a}.$$

4. Ci proponiamo ora di estendere i risultati visti nei punti precedenti nel caso di un vettore ed un sottospazio di dimensione 1, al caso di piu' vettori e sottospazi di dimensione qualsiasi. Per questo mettiamo in evidenza una identita' fra combinazioni lineari di vettori e prodotti matrice per vettore, identita' che ci permettera' di rappresentare sinteticamente un sottoaspazio generato da piu' vettori ed il suo complemento ortogonale.

   Per ogni m vettori $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ ed ogni m scalari $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$, indicata con $A = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matrice avente per colonne i vettori $a_1, \ldots, a_m$, e indicato con $r \in \mathbb{R}^m$ il vettore avente per componenti gli scalari $r_1, \ldots, r_m$ si ha

   $$a_1 r_1 + \cdots + a_m r_m = Ar.$$

   Infatti, posto $a_1 = [a_{i1}]_1^n$, ... $a_m = [a_{im}]_1^n$, si ha che sia la i-ma componente del vettore $a_1 r_1 + \cdots + a_m r_m$ sia la i-ma componente del vettore Ar sono uguali a $a_{i1} r_1 + \cdots + a_{im} r_m$, per ogni $i = 1, \ldots, n$.

5. Siano $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Osserviamo che

   (i) Per definizione, il sottospazio $\langle a_1, \ \ldots, \ a_m \rangle$ generato da $a_1, \ldots, a_m$ e' l'insieme dei vettori che sono ottenuti come combinazione lineare di $a_1, \ldots, a_m$ con coefficienti $r_1, \ldots, r_m$ che variano in $\mathbb{R}$; per il punto precedente, queste combinazioni lineari equivalgono ai prodotti della matrice $A = \left[\begin{array}{ccc} a_1 & \ldots & a_m \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$ avente per colonne i generatori $a_1, \ldots, a_m$, per un vettore r che varia in $\mathbb{R}^m$:

$$\langle a_1,\ \ldots,\ a_m \rangle = \{a_1 r_1 + \cdots + a_m r_m;\ r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}\} = \{Ar;\ r \in \mathbb{R}^m\}.$$

Inoltre si ha

$$\dim \langle a_1,\ \ldots,\ a_m \rangle = r(A).$$

(ii) Per definizione, il complemento ortogonale $\{a_1, \ldots, a_m\}^{\perp}$ dell'insieme dei vettori $a_1, \ldots, a_m$ e' l'insieme dei vettori $x \in \mathbb{R}^n$ che sono soluzioni del sistema delle m equazioni lineari omogenee $a_1' x = 0$, ... $a_m' x = 0$, cioe' del sistema lineare omogeneo che ha per matrice dei coefficienti A^T :

$$\{a_1,\ \ldots,\ a_m\}^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ a_1' x = 0,\ \ldots,\ a_m' x = 0\} = \left\{x \in R^n :\ A^T x = 0_{m\cdot}\right\}.$$

Inoltre si ha

$$\dim \langle a_1,\ \ldots,\ a_m \rangle^{\perp} = n - r(A^T) = n - r(A).$$

6. Il complemento ortogonale di un sottospazio e' l'insieme delle soluzioni di infinite equazioni lineari omogenee, una per ciascun elemento dell sottospazio; ci si puo' pero' sempre ricondurre ad un numero finito di equazioni.

   Proposizione 1 *Sia $V = \langle a_1, \ldots,\ a_m \rangle$ un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, generato da m vettori $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$, e sia $x \in \mathbb{R}^n$. Si ha che x e' ortogonale ad ogni $v \in V$ se e solo se x e' ortogonale ad ogni $a_1, \ldots, a_m$.*

   Dim. Infatti: se x e' ortogonale ad ogni vettore di V, essendo ogni a_j un vettore di V, si ha in particolare che x e' ortogonale ad ogni a_j; d'altro canto per le proprieta' della relazione di ortogonalita', se x e' ortogonale ad ogni a_j allora x e' ortogonale ad ogni combinazione lineare $r_1 a_1 + \cdots + r_m a_m$ degli a_j, e queste combinazioni lineari sono esattamente gli elementi di V, cosi' x e' ortogonale ad ogni elemento di V.

   In altri termini, la proposizione afferma che per un qualsiasi sottospazio $V = \langle a_1, \ldots,\ a_m \rangle$ generato da m vettori $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$V^{\perp} = \{a_1, \ldots, a_m\}^{\perp}.$$

7. Possiamo riassumere quanto visto nei punti precedenti nel modo seguente

   Siano $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ e sia $A = \left[\begin{array}{ccc} a_1 & \ldots & a_m \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matrice avente per colonne $a_1, \ldots, a_m$. Il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dall'insieme dei vettori $a_1, \ldots, a_m$ e il suo complemento ortogonale possono essere descritti sinteticamente come

$$\langle a_1,\ \ldots,\ a_m \rangle = \{Ar;\ r \in \mathbb{R}^m\},$$

$$\langle a_1,\ \ldots,\ a_m \rangle^{\perp} = \left\{x \in R^n :\ A^T x = 0_{m\cdot}\right\},$$

   e si ha

$$\dim \langle a_1,\ \ldots,\ a_m \rangle + \dim \langle a_1,\ \ldots,\ a_m \rangle^{\perp} = n.$$

Inoltre, poiche' ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ si puo' vedere come sottospazio generato da un numero finito di vettori, si ha

Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$; allora
$$\dim V + \dim V^\perp = n.$$

8. **Proiezione ortogonale su un sottospazio**

   La definizione di proiezione ortogonale di un vettore di $\mathbb{R}^2$ su un sottospazio di dimensione 1 (una retta per O), e la definizione di proiezione ortogonale di un vettore di $\mathbb{R}^3$ su un sottospazio di dimensione 2 (un piano per O) ammettono la seguente estensione.

   Teorema 3 , e Definizione. *Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come*
   $$b = p + q,$$
   dove $p \in V$ e $q \in V^\perp$. Il vettore p si chiama "proiezione ortogonale" del vettore b sul sottospazio V, e si indica con $pr_V(b)$.

   La dimostrazione di questo teorema si puo' dedure dal fatto che $\dim V + \dim V^\perp = n$; non la riportiamo.

   Cosi' come si e' ricavata una formula per la proiezione ortogonale di un vettore di $\mathbb{R}^2$ su un sottospazio di dimensione 1 (una retta per O), e per la proiezione ortogonale di un vettore di $\mathbb{R}^3$ su un sottospazio di dimensione 2 (un piano per O), si ricava una formula, in un certo senso la stessa formula, per la proiezione ortogonale di un vettore di $\mathbb{R}^n$ su un sottospazio.

   Teorema 4 *Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, sia $\{a_1, \dots, a_m\}$ una base di V, e sia $A = [a_1, \dots, a_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ la matrice avente colonne $a_1, \dots, a_m$. La proiezione ortogonale di un vettore $b \in \mathbb{R}^n$ sul sottospazio V e' data da*
   $$p = A(A^TA)^{-1}A^Tb.$$

Norma di un vettore in $\mathbb{R}^n$, basi ortonormali.

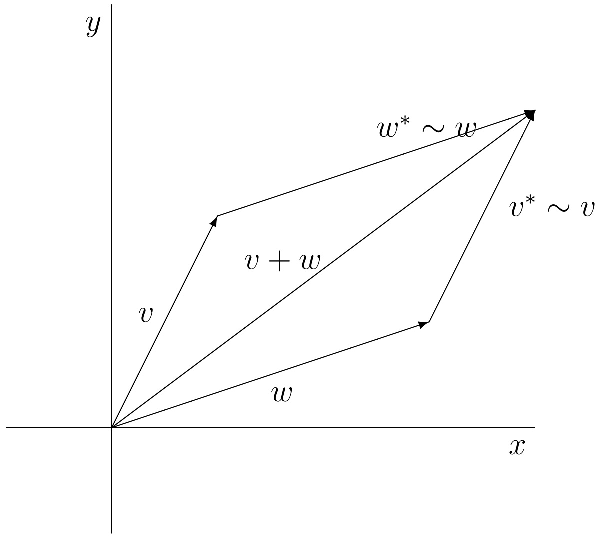
1. **Norma di un vettore.**

   Consideriamo il piano vettoriale geometrico $\mathfrak{P}_O$, identificato con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ tramite un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O.

   Per il Teorema di Pitagora, si ha che la lunghezza $\|v\|$ del vettore $v = [v_i]_{1=1}^2$ e' data, nell'unita' di misura scelta, da
   $$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

   La lunghezza dei vettori e' legata alle operazioni sui vettori nel modo seguente:

- Consideriamo due vettori v, w e il vettore $v + w$ loro somma.



  Osserviamo che un punto che partendo da O si sposta prima lungo il vettore v e poi si sposta lungo il vettore $w^* \sim w$ descrive due lati di un triangolo che ammette il vettore $v+w$ come terzo lato. Ora, la lunghezza di un lato di un triangolo non supera la somma delle lunghezze degli altri due. Si ha cosi' si ha disuguaglianza

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$$

  detta appunto *disuguaglianza triangolare*.

- Consideriamo un vettore v, uno scalre r e il vettore vr multiplo di v secondo r. Allora:

$$\|vr\| = \|v\||r|,$$

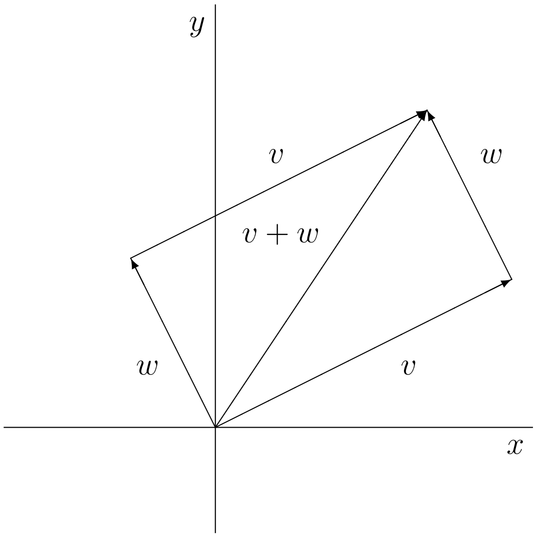
  dove $|r|$ e' il valore assoluto di r.

Utilizzando il prodotto scalare, possiamo riscrivere la lunghezza di un vettore a di $\mathbb{R}^2$ nella forma

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a}.$$

Il teorema di Pitagora puo' essere espresso algebricamente nella forma: se due vettori v e w sono fra loro ortogonali, allora il quadrato della lunghezza del vettore somma $v + w$ e' uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei vettori addendi v, w :

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$



Consideriamo lo spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{S}_O$, identificato con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ tramite un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O.

Per il Teorema di Pitagora (applicato due volte), si ha che la lunghezza $\|v\|$ del vettore $v = [v_i]_{i=1}^3$ e' data, nell'unita' di misura scelta, da

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Utilizzando il prodotto scalare, possiamo riscrivere la lunghezza di un vettore a di $\mathbb{R}^3$ nella forma

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a}.$$

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ definiamo la lunghezza $\|v\|$ di un vettore $v = [v_i]_{i=1}^n$ di $\mathbb{R}^n$ ponendo

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{v \cdot v}.$$

Solitamente, specialmente nel caso $n > 3$, al termine *lunghezza* si preferisce il termine *norma.*

2. Proprieta'.

   Il prodotto scalare di due vettori u, v e' legato alle loro norme dalla *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

$$-\|u\|\|v\| \leq u \cdot v \leq \|u\|\|v\|,$$

   o, in altri termini,

$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}. \leq 1$$

Non diamo la dimostrazione di questa disuguaglianza; mettiamo in evidenza che essa permette di definire l'angolo formato da due vettori: il coseno dell'angolo dei vettori u e v viene definito ponendo

$$\cos \widehat{uv} = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}.$$

Si osservi che, in base a questa definizione, si ha:

$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos \widehat{uv}.$$

Un semplice conto particolarmente interessante:

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= (u+v) \cdot (u+v) \\ &= u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v \\ &= \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Le principali proprieta' della norma dei vettori in $\mathbb{R}^n$ sono:

- la norma di un vettore e' sempre maggiore-uguale a zero e vale zero se e solo se il vettore e' nullo:
  $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$;
  $\|v\| = 0 \quad \textit{se e solo se} \quad v = 0_n$.
- La norma del vettore prodotto di un vettore per uno scalare e' uguale al prodotto della norma del vettore per il valore assoluto dello scalare:

  $$\|vr\| = \|v\||r|, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

- La norma del vettore somma e' minore o uguale alla somma delle norme dei vettori addendi:

  $$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

  Questa disuguaglianza viene detta *disuguaglianza triangolare*, per il significato che assume nel piano e nello spazio.

Le prime due proprieta' seguono direttamente dalle proprieta' del prodotto scalare. Mostriamo come la disuguaglianza triangolare si possa dimostrare usando la disuuaglianza di Cauchy-Schwarz.

Infatti si ha

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 . \end{aligned}$$

Dunque si ha la disuguaglianza

$\|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$,

che e' equivalente alla disuguaglianza

$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,$

in quanto sia $\|u + v\|$ che $\|u\| + \|v\|$ sono $\geq 0.$

Nello spazio $\mathbb{R}^n$ vale il teorema di Pitagora: se due vettori a e b sono ortogonali, cioe' se $a \cdot b = 0$, allora

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Infatti

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2a \cdot b + \|b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

3. Un vettore di norma 1 si dice *versore.* Ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ e' canonicamente associato un versore, ottenuto dividendo v per la sua norma:

   $\frac{1}{\|v\|} v.$

   I vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ sono versori a due a due ortogonali:

   $e_h \perp e_k = 0, \qquad \forall h, k = 1, \ldots, n, \; h \neq k$

   $\|e_h\| = 1, \qquad \forall h = 1, \ldots, n.$

   Informalmente, possiamo dire che la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e' un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico per $\mathbb{R}^n$.

   Osserviamo che, per ogni vettore $b = [b_i]_1^n$ in $\mathbb{R}^n$, si ha

   $e_1 \cdot b = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \cdots + 0 \cdot b_n = b_1$

   $e_2 \cdot b = 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + \cdots + 0 \cdot b_n = b_2$

   $\vdots$

   $e_n \cdot b = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \cdots + 1 \cdot b_n = b_n,$

   cioe' i prodotti scalari dei vettori della base canonica per un vettore danno le componenti del vettore. Possiamo cosi' scrivere il vettore b nella forma

   $b = (e_1 \cdot b)\, e_1 + (e_2 \cdot b)\, e_2 + \cdots + (e_n \cdot b)\, e_n.$

4. **Ortogonalita' e indipendenza lineare**

   Nel piano vettoriale geometrico $\mathfrak{P}_O$ si ha che due vettori non nulli fra loro ortogonali non possono essere allineati; nello spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{S}_O$ si ha che due vettori non nulli fra loro ortogonali non possono essere allineati, e tre vettori non nulli fra loro ortogonali non possono essere complanari. Questi fatti si estendono nel modo seguente.

Proposizione 2 *Siano $v_1, v_2, \ldots, v_m$, con $v_h \neq 0_n$ per ogni $h = 1, 2, \ldots, m$ e $v_h \perp v_k$ per ogni $h \neq k$, vettori di $\mathbb{R}^n$ non nulli a due a due ortogonali. Allora $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti.*

Dim. Consideriamo una combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ che sia uguale al vettore nullo

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_m v_m = 0_n \qquad \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{R}.$$

Col prodotto scalare, moltiplichiamo v_1 per entrambe i membri, ed otteniamo

$$v_1 \cdot (\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_m v_m) = v_1 \cdot 0_n,$$

$$\gamma_1 (v_1 \cdot v_1) + \gamma_2 (v_1 \cdot v_2) + \cdots + \gamma_m (v_1 \cdot v_m) = 0;$$

poiche' v_1 e' ortogonale agli altri vettori, l'uguaglianza diviene

$$\gamma_1 (v_1 \cdot v_1) = 0;$$

poiche' $v_1 \neq 0_n$, si ha $v_1 \cdot v_1 \neq 0$, da cui $\gamma_1 = 0$.

In modo analogo si prova che $\gamma_2 = \cdots = \gamma_m = 0$.

5. **Basi ortonormali**

   Cosi' come nel piano $\mathfrak{P}_O$ e nello spazio $\mathfrak{S}_O$ ci sono tanti sistemi di riferimento cartesiani ortogonali monometrici, anche in $\mathbb{R}^n$ ci sono tante basi simili alla base canonica.

   Siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$, con $\|v_h\| = 1$ per ogni $h = 1, 2, \ldots, n$ e $v_h \perp v_k$ per ogni $h \neq k$, versori di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali. Per il punto precedente, i versori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti; inoltre, essendo il loro numero n uguale alla dimensione dell'intero spazio $\mathbb{R}^n$, essi sono una base di $\mathbb{R}^n$. Una base siffatta si dice "base ortonormale" di $\mathbb{R}^n$.

   Proposizione 3 *Siano $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, e $b \in \mathbb{R}^n$. Le coordinate di b rispetto alla base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ sono i prodotti scalari di b con i vettori v_h :*

   $$b = (v_1 \cdot b)\, v_1 + (v_2 \cdot b)\, v_2 + \cdots + (v_n \cdot b)\, v_n.$$

   La dimostrazione di questa proposizione e' analoga alla dimostrazione della proposizione del punto prececdente.

6. Basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ si possono ottenere nel modo che descriviamo informalmente di seguito.

   In $\mathbb{R}^n$ si sceglie un $u_1 \neq 0_n$. In $\{u_1\}^\perp$ si sceglie un $u_2 \neq 0_n$; in altri termini, fra le soluzioni dell'equazione lineare omogenea

   $$u_1 \cdot x = 0$$

   si sceglie una soluzione u_2 non banale. In $\{u_1, u_2\}^\perp$ si sceglie un $u_3 \neq 0_n$; in altri termini, fra le soluzioni del sistema lineare omogeneo

   $$\begin{cases} u_1 \cdot x = 0 \\ u_2 \cdot x = 0 \end{cases}$$

   si sceglie una soluzione u_3 non banale. ...

   Si arriva cosi' ad ottenere n vettori $u_1, u_2, \ldots, u_n$ a due a due ortogonali. Infine si prende per ciascuno di essi il versore associato.