Geometria e Algebra (II), 18.12.12

1. A ciascuna funzione lineare sono associati in modo naturale un sottospazio del codominio ed un sottospazio del dominio.

   Definizione 1 *Sia* $f : V \to W$ *una funzione lineare.*

   L'immagine $\mathrm{im} f$ *della funzione* f *e' l'immagine secondo* f *dell'insieme* V :

   $$\mathrm{im} f = \{f(x);\ x \in V\}\,.$$

   Il nucleo $\ker f$ *della funzione* f *e' l'insieme delle preimmagini secondo* f *del vettor nullo di* W :

   $$\ker f = \{x \in V :\ f(x) = 0_w\}\,.$$

   Si ha che:

   - $\mathrm{im} f$ e' un sottospazio di W; infatti: $\mathrm{im} f$ e' chiaramente non vuoto; comunque dati $f(x), f(y) \in \mathrm{im} f$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha $f(x) + f(y) = f(x+y) \in \mathrm{im} f$, e $f(x)\alpha = f(x\alpha) \in \mathrm{im} f$;
   - $\ker f$ e' un sottospazio di V; infatti: $\ker f$ e' non vuoto in quanto $0_v \in \ker f$; comunque dati $x, y \in \mathrm{kerf} f$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0_w + 0_w = 0_w$, e $f(x\alpha) = f(x)\alpha = 0_w\alpha = 0_w$ cosi' $x + y, x\alpha \in \mathrm{kerf} f$.

   Osservazione: sia $\mathfrak{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V; allora $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ e' un insieme di generatori per $\mathrm{im} f$. Infatti: per ogni $x \in V$ esistono $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tali che

   $$x = v_1x_1 + \cdots + v_nx_n,$$

   cosi'

   $$f(x) = f(v_1x_1 + \cdots + v_nx_n) = f(v_1)\,x_1 + \cdots + f(v_n)\,x_n;$$

   abbiamo dunque che ogni $f(x) \in \mathrm{im} f$ si puo' scrivere come combinazione lineare di $f(v_1), \ldots, f(v_n)$.

2. Esempi.

   - Sia $f : \mathfrak{S}_O \to \mathfrak{S}_O$ una rotazione attorno a una retta per O. Si ha che: ogni vettore $w \in \mathfrak{S}_O$ e' immagine di qualche (in realta' di un solo) vettore $x \in \mathfrak{S}_O$, ottenuto applicando a w la rotazione inversa attorno alla stessa retta; l'unico vettore $x \in \mathfrak{S}_O$ che viene mandato nel vettore nullo 0 e' il vettore nullo 0. Dunque

     $$\mathrm{im} f = \mathfrak{S}_O, \quad \ker f = \{0\}.$$

- Sia $\mathrm{pr}_\pi : \mathfrak{S}_O \to \mathfrak{S}_O$ la proiezione ortogonale su un piano π per O. Per ogni vettore $x \in \mathfrak{S}_O$, si ha $\mathrm{pr}_\pi(x) \in \pi$; viceversa, per ogni vettore $w \in \pi$ esiste almeno un $x \in \mathfrak{S}_O$ tale che $\mathrm{pr}_\pi(x) = w$, ad esempio $x = w$. I vettori $x \in \mathfrak{S}_O$ tali che $\mathrm{pr}_\pi(x) = 0$ sono tutti e soli i vettori $x \in \pi^\perp$, dove $\pi^\perp$ e' la retta per O ortogonale al piano π. Dunque

  $$\mathrm{im} f = \pi, \quad \ker f = \pi^\perp.$$

- Sia $\mathrm{pr}_\lambda : \mathfrak{S}_O \to \mathfrak{S}_O$ la proiezione ortogonale su una retta l per O. Per ogni vettore $x \in \mathfrak{S}_O$, si ha $\mathrm{pr}_l(x) \in l$; viceversa, ogni vettore $w \in l$ esiste almeno un $x \in \mathfrak{S}_O$ tale che $\mathrm{pr}_l(x) = w$, ad esempio $x = w$. I vettori $x \in \mathfrak{S}_O$ tali che $\mathrm{pr}_l(x) = 0$ sono tutti e soli i vettori $x \in l^\perp$, dove $l^\perp$ e' il piano per O ortogonale alla retta l. Dunque

  $$\mathrm{im} f = l, \quad \ker f = l^\perp.$$

- Sia $f : \mathfrak{S}_O \to \mathfrak{S}_O$, $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathfrak{S}_O$. Si ha

  $$\mathrm{im} f = \{0\}, \quad \ker f = \mathfrak{S}_O.$$

- Sia $f : \mathfrak{S}_O \to W$, $f(x) = 0_w$ per ogni $x \in \mathfrak{S}_O$, dove W e' un qualsiasi spazio vettoriale. Si ha

  $$\mathrm{im} f = \{0_w\}, \quad \ker f = \mathfrak{S}_O.$$

3. In ciascuno degli esempi precedenti si ha che la somma delle dimensioni dell'immagine e del nucleo della funzione lineare e' uguale a 3, che e' la dimensione del dominio della funzione stessa. Non e' un caso.

Proposizione 1 *Sia $f : V \to W$ una funzione lineare fra due spazi vettoriali V e W. Allora*

$$\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{im} f) = \dim(V).$$

Dim. Posto $\dim V = n$ e $\dim(\ker f) = k$, dobbiamo provare che

$$\dim(\mathrm{im} f) = n - k.$$

Sia $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base di $\ker f$, e sia $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ una sua estensione ad una base di V. I vettori

$$f(u_1), \ldots, f(u_k), f(u_{k+1}), \ldots, f(u_n)$$

generano $\mathrm{im} f$; si ha $f(u_1) = \cdots = f(u_k) = 0_w$, dunque bastano i vettori

$$f(u_{k+1}), \ldots, f(u_n)$$

a generare $\mathrm{im} f$.

Affermiamo che questi vettori sono linearmente indipendenti; lo proviamo di seguito. Siano $\delta_1, \ldots, \delta_{n-k} \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(u_{k+1})\delta_1 + \cdots + f(u_n)\delta_{n-k} = 0_w.$$

Per la linerita' di f abbiamo

$$f(u_{k+1}\delta_1 + \cdots + u_n\delta_{n-k}) = 0_w,$$

e cio' significa che $u_{k+1}\delta_1 + \cdots + u_n\delta_{n-k} \in \ker f$. Essendo $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base di $\ker f$, esistono $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$u_{k+1}\delta_1 + \cdots + u_n\delta_{n-k} = u_1\gamma_1 + \cdots + u_k\gamma_k;$$

portando tutto ad uno stesso membro, abbiamo

$$u_1\gamma_1 + \cdots + u_k\gamma_k - u_{k+1}\delta_1 - \cdots - u_n\delta_{n-k} = 0_v;$$

essendo i vettori $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ linearmente indipendenti, si ha $\gamma_1 = \cdots = \gamma_k = -\delta_1 = \cdots = -\delta_{n-k} = 0$; in particolare si ha $\delta_1 = \cdots = \delta_{n-k} = 0$.

Dunque, gli $n-k$ vettori $f(u_{k+1}), \ldots, f(u_n)$ formano una base di $\mathrm{im} f$, cosi'

$$\dim(\mathrm{im} f) = n - k.$$

4. Siano dati due spazi vettoriali V e W con $\dim V = n$ e $\dim W = m$, una funzione lineare $f : V \to W$ e un vettore $w \in W$. Consideriamo l'equazione

   $$f(x) = w$$

   nell'incognita $x \in V$.

   Si ha che:

   - L'equazione ha soluzioni se e solo se $w \in \mathrm{im} f$; se $\mathfrak{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e' una base di V cio' equivale a dire che $w \in \langle f(v_1), \ldots, f(v_n) \rangle$.
   - Se c'e' almeno una soluzione x_0, allora le soluzioni sono tutti e soli i vettori

     $$x_0 + y,$$

     dove y varia in $\ker f$. Infatti: da una parte, se $y \in \ker f$, allora

     $$f(x_0 + y) = f(x_0) + f(y) = w + 0_w = w;$$

     dall'altra, se x_1 e' una soluzione dell'equazione, allora per $y = x_1 - x_0$ si ha

     $$f(x_1 - x_0) = f(x_1) - f(x_0) = w - w = 0_w,$$

     cioe' $y \in \ker f$, e $x_1 = x_0 + y$.

     In altri termini, l'insieme delle soluzioni e' la sottovarieta' lineare di V che passa per x_0 ed ha sottospazio direttore $\ker f$:

     $$x_0 + \ker f.$$

   Per esercizio, si applichino questi risultati sull'esempio della funzione $f = \mathrm{pr}_l : \mathfrak{P}_O \to \mathfrak{P}_O$ proiezione ortogonale su una retta l per O.

5. Diciamo che uno spazio vettoriale V e' isomorfo ad un spazio vettoriale W se esiste un isomorfismo da V a W. E' naturale chiedersi sotto quali condizioni cio' accade.

   Osserviamo che

- Se $\dim V = n = \dim V$, allora scelta una base $\mathfrak{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V e una base $\mathfrak{W} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di W, si ha che la posizione
$$f(v_1x_1 + \cdots + v_nx_n) = w_1x_1 + \cdots + w_nx_n, \qquad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$
definisce un isomorfismo da V a W.
- Viceversa, se esiste un isomorfismo $f : V \to W$, allora $\dim(\ker f) = \dim\{0_v\} = 0$, e $\dim(\mathrm{im} f) = \dim W$, cosi' la relazione
$$\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{im} f) = \dim(V)$$
porge
$$\dim(W) = \dim(V).$$

In definitiva, uno spazio vettoriale V e' isomorfo ad uno spazio vettoriale W se e solo se $\dim V = \dim W$.

6. Descriviamo ora la relazione che sussiste fra l'algebra delle funzioni lineari fra gli spazi vettoriali $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \ldots$ con l'operazione (parziale) di composizione, e l'algebra delle matrici ad entrate reali con l'operazione (parziale) di prodotto.

Date due funzioni lineari $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ si ha che la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e' ancora lineare.

Ci chiediamo quale relazione sussiste fra la matrice che rappresenta $g \circ f$ e le matrici che rappresentano g e f. Osserviamo che: da una parte, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha
$$(g \circ f)(x) = M(g \circ f)\, x;$$
dall'altra, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = M(g)\, f(x) = M(g)\, M(f)\, x.$$
Dunque
$$M(g \circ f) = M(g)M(f),$$
cioe' la matrice che rappresenta la funzione composta e' il prodotto delle matrici che rappresentano le funzioni componende. In breve: il prodotto di matrioci rappresenta la composizione di funzioni lineari.

Per ogni $n = 1, 2, \ldots$, la funzione lineare identica $\mathrm{id}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definita da $\mathrm{id}_n(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e' lineare. La matrice che la rappresenta e' la matrice unita' di ordine n :
$$M(\mathrm{id}_n) = I_n.$$
Sia ora $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione lineare biiettiva (isomorfismo); allora la funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e' ancora lineare. Il fatto che f^{-1} sia la funzione inversa di f e' caratterizzato dalle uguaglianze fra funzioni
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_n = f^{-1} \circ f,$$
cui corrispondono le uguaglianze fra matrici
$$M(f)M(f^{-1}) = I_n = M(f^{-1})\, M(f).$$

Dunque

$$M\left(f^{-1}\right) = (M(f))^{-1}.$$

In breve, possiamo dire che l'inversione di matrici rappresenta l'inversione di funzioni lineari.

7. Passando dall' algebra delle funzioni lineari fra spazi vettoriali $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \ldots$ con l'operazione di composizione, all' algebra delle funzioni lineari fra spazi vettoriali finitamente generati "astratti" con l'operazione di composizione, i risultati del punto precedente diventano i seguenti.

   Siano V, W, Z spazi vettoriali finitamente generati, siano $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}, \mathfrak{Z}$ loro basi, siano $f : V \to W$ e $g : W \to Z$, funzioni lineari, e sia $g \circ f : V \to Z$ la funzione composta (lineare).

   La matrice che rappresenta $g \circ f$ rispetto alle basi $\mathfrak{V}, \mathfrak{Z}$ e' il prodotto della matrice che rappresenta g rispetto alle basi $\mathfrak{W}, \mathfrak{Z}$ per la matrice che rappresenta f rispetto alle basi $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$:

   $$M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{v}}(g \circ f) = M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{w}}(g) M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f).$$

   Per ogni spazio vettoriale V con $\dim V = n$, la funzione lineare identica $\mathrm{id}_V : V \to V$, definita da $\mathrm{id}_V(x) = x$ per ogni $x \in V$ e' lineare. La matrice che la rappresenta rispetto alle basi $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}$ e' la matrice unita' di ordine n :

   $$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\mathrm{id}_V) = I_n.$$

   Sia ora $f : V \to W$ una funzione lineare biiettiva (isomorfismo); allora la funzione inversa $f^{-1} : W \to V$ e' ancora lineare. Si ha

   $$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{w}}\left(f^{-1}\right) = \left(M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f)\right)^{-1}.$$

8. In questa lezione abbiamo visto come i primi aspetti della teoria dei sistemi lineari e dell'algebra delle matrici si solevano ad un livello "astratto". Tutti gli altri argomenti svolti in precedenza, sui determinanti e su autovettori ed autovalori, si sollevano a questo livello. Ci fermiamo qui; quanto visto dovrebbe dare un'idea degli ulteriori sviluppi.