

## Geometria e Algebra (II), Esercizi IV

1. Nel piano euclideo  $\mathbb{R}^2$  sono dati i vettori  $a = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  e  $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ; si determini la proiezione ortogonale  $p$  di  $b$  sulla retta  $L$  generata da  $a$ ; per quale scalare bisogna moltiplicare  $a$  per ottenere  $p$ ?

2. Nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  sono dati i vettori

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix};$$

si determini la proiezione ortogonale  $p$  di  $b$  sulla retta  $L$  generata da  $a$ ; si dia una rappresentazione di  $a$ ,  $b$  e  $p$  nel piano euclideo  $\mathbb{R}^2$  che rispetti ortogonalità e lunghezze.

3. Nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  sono dati i vettori

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix};$$

si determini la proiezione ortogonale  $p$  di  $b$  sul piano  $V$  generato da  $a_1$  e  $a_2$ ; con quali scalari bisogna combinare linearmente  $a_1$  e  $a_2$  per ottenere  $p$ ?

4. Nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^2$  sono dati i vettori

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

l'insieme  $\{a_1, a_2\}$  è una base di  $\mathbb{R}^2$ , è ortonormale? si determinino le coordinate del vettore  $b$  rispetto a questa base.

5. Nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  sono dati i vettori

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

fra loro ortogonali; si determini un vettore  $a_3$  ortogonale ad  $a_1$  e  $a_2$ ; moltiplicando per opportuni scalari, si normalizzino i vettori  $a_1, a_2, a_3$  in modo da ottenere una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$ .