Geometria e Algebra (II), Esercizi V

Alcune notazioni e definizioni dalle ultime due lezioni.
Ad ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ corrisponde una funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definita ponendo $f(x) = Ax$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Per ogni funzione lineare $f : R^m \to \mathbb{R}^n$ esiste una ed una sola matrice $M(f) \in R^{m \cdot n}$ tale che $f(x) = M(f)x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$; diciamo che $M(f)$ e' la matrice che rappresenta la funzione lineare f.
Siano V uno spazio vettoriale, sia $\mathfrak{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V, e $x \in V$; con $[x]_{\mathfrak{V}} \in \mathbb{R}^n$ indichiamo il vettore delle coordinate di x rispetto alla base $\mathfrak{V}$.
Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione n e m, rispettivamente, siano $\mathfrak{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathfrak{W} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ loro basi. Per ogni funzione lineare $f : V \to W$ esiste una ed una sola matrice $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f) \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ tale che $[f(x)]_{\mathfrak{w}} = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f)[x]_{\mathfrak{v}}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$; diciamo che $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f)$ e' la matrice che rappresenta la funzione lineare f rispetto alle basi $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$.

1. Per ciascuna delle seguenti funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si scriva la matrice che la rappresenta: la proiezione ortogonale sulla bisettrice del II e IV quadrante; la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante; la rotazione di un angolo retto in senso antiorario attorno all'origine.

2. Siano $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la corrispondente funzione lineare.

   Si determini una base $\mathfrak{V} = \{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A.

   Si determini la matrice $M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base $\mathfrak{V}$.

3. Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione 3 e 2, e siano $\mathfrak{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathfrak{W} = \{w_1, w_2\}$ loro basi. Sia $f : V \to W$ la funzione lineare rappresentata rispetto alle basi $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ dalla matrice
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
   Come agisce f sul generico elemento di V?

4. Siano date la matrice e il vettore
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$
   Sia $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare corrispondente alla matrice A.

   Si determini una base dello spazio nucleo $\ker f$ di f.

   Si determini una base dello spazio immagine $\mathrm{im} f$ di f.

   Il vettore b appartiene a $\mathrm{im} f$?

   Si determinino le soluzioni dell'equazione $f(x) = b$.