Risoluzione esercizi della II prova parziale del 9 Gennaio 2013; tema 1.

Esercizio 3. (9 punti)
Per ciascuna delle seguenti matrici, si dica se è diagonalizzabile o meno; in caso affermativo, la si diagonalizzi, e si verifichi il risultato ottenuto.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Risoluzione

1. Consideriamo la matrice
$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}.$$
Il polinomio caratteristico di A_1 e'
$$\det(A_1 - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 10 \\ -3 & 8-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6;$$
l'equazione $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ ha due soluzioni reali distinte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. La matrice A_1 quadrata di ordine 2 ha due autovalori reali distinti
$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3,$$
dunque A_1 e' diagonalizzabile. Se v_1 e v_2 sono autovettori di A_1 con autovalori associati 2 e 3, allora
$$A_1 = PDP^{-1}, \quad \text{dove} \quad P = [v_1,\ v_2], \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
L'autospazio V_2 della matrice A_1 corrispondente all'autovalore 2 e' l'insieme delle soluzioni del sistema
$$(A_1 - 2I_2)x = 0_2, \quad \text{cioe'} \quad \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} x = 0_2, \qquad x \in \mathbb{R}^2;$$
questo sistema e' equivalente all'unica equazione
$$x_1 - 2x_2 = 0,$$
che ha soluzioni
$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
Prendo
$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
L'autospazio V_3 della matrice A_1 corrispondente all'autovalore 3 e' l'insieme delle soluzioni del sistema
$$(A_1 - 3I_2)x = 0_2, \quad \text{cioe'} \quad \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} x = 0_2, \qquad x \in \mathbb{R}^2;$$
questo sistema e' equivalente all'unica equazione
$$3x_1 - 5x_2 = 0,$$
che ha soluzioni
$$x = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
Prendo
$$v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dunque

$$A_1 = PDP^{-1}, \quad \text{dove} \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

La verifica dell'uguaglianza $A_1 = PDP^{-1}$ puo' essere ricondotta alla verifica dell'uguaglianza $AP = PD$ e della invertibilita' della matrice P.

Queste verifiche vengono lasciate al lettore.

2. Consideriamo la matrice

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A_2 e'

$$\det(A_2 - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1;$$

l'equazione $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ ha due soluzioni reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, e si ha

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Dunque A_2 ha un autovalore

$$\lambda = 1, \quad \text{con con molteplicita' algebrica } m_a(1) = 2.$$

La molteplicita' geometrica dell'autovalore 1 e' data da

$$m_g(1) = \dim V_1 = 2 - r\,(A_2 - I_2) = 2 - r \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

Si ha

$$m_g(1) = 1 < 2 = m_a(1),$$

dunque la matrice A_2 non e' diagonalizzabile.

3. Consideriamo la matrice

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mostriamo due modi per rispondere alle questioni su questa matrice. Il primo e' immediato, il secondo richiede qualche conto.

Primo modo. Osserviamo che A_3 e' diagonale. Possiamo allora scrivere $A_3 = PDP^{-1}$, prendendo come matrice diagonale $D = A_3$ e come matrice invertibile $P = I_2$.

Secondo modo. Il polinomio caratteristico di A_3 e'

$$\det(A_3 - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2;$$

l'equazione ha due soluzioni reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Dunque A_3 ha un autovalore

$$\lambda = 2, \quad \text{con con molteplicita' algebrica } m_a(2) = 2.$$

La molteplicita' geometrica dell'autovalore 2 e' data da

$$m_g(2) = \dim V_2 = 2 - r\,(A_3 - 2I_2) = 2 - r \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 - 0 = 2.$$

Si ha

$$m_g(2) = 2 = m_a(2),$$

dunque la matrice A_2 e' diagonalizzabile. Se v_1 e v_2 sono autovettori linearmente indipendenti di A_3 con autovalore associato 2, allora

$$A_1 = PDP^{-1}, \quad \text{dove} \quad P = [v_1,\ v_2]\,, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

L'autospazio V_2 della matrice A_3 corrispondente all'autovalore 2 e' l'insieme delle soluzioni del sistema

$$(A_3 - 2I_2)x = 0_2, \quad \text{cioe'} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0_2, \qquad x \in \mathbb{R}^2;$$

questo sistema ha per soluzioni tutti gli $x \in \mathbb{R}^2$. Prendo due vettori linearmente indipendeti, ad esempio i vettori della base canonica

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque

$$A_3 = PDP^{-1}, \quad \text{dove} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La verifica di questo risultato e' immediata, in quanto $P = I_2$ e $D = A_3$.

4. Consideriamo la matrice

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A_4 e'

$$\det(A_4 - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2;$$

l'equazione $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ ha discriminante $\Delta = 4 - 8 < 0$, dunque non ha soluzioni reali.

La matrice A_4 non ha alcun autovalore, dunque non e' diagonalizzabile.

Esercizio 4. (6 punti)
Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sia $L = \langle a_1 \rangle$ la retta generata da a_1. Siano $f = \mathrm{pr}_L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g = \mathrm{pr}_{L^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le proiezioni ortogonali su L e $L^\perp$, rispettivamente. Si determini la proiezione ortogonale $\mathrm{pr}_L(x)$ del generico vettore $x = [x_i]_{i=1}^3$ sulla retta L. Si determini la matrice $M(f)$ che rappresenta la funzione f. I vettori a_1, a_2, a_3 formano una base $\mathfrak{V}$ di $\mathbb{R}^3$; si determinino le matrici $M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ e $M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(g)$ che rappresentano f e g rispetto alla base $\mathfrak{V}$.

Risoluzione
La proiezione ortogonale $\mathrm{pr}_L(x)$ del vettore $x = [x_i]_1^3$ sulla retta $L = \langle a_1 \rangle$ generata da a_1 e' data da

$$\mathrm{pr}_L(x) = a_1 \frac{a_1 \cdot x}{a_1 \cdot a_1}$$

cioe'

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{x_1 - x_2 + 2x_3}{6} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

dunque la matrice che rappresenta la funzione $f = \mathrm{pr}_L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e' data da

$$M(f) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

La matrice $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(f)$ che rappresenta la funzione $f = \mathrm{pr}_L$ rispetto alla base $\mathfrak{V}$ dei vettori a_1, a_2, a_3 e' data esplicitamente da

$$M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(f) = \left[[f(a_1)]_{\mathfrak{v}},\ [f(a_2)]_{\mathfrak{v}},\ [f(a_3)]_{\mathfrak{v}}\right],$$

dove $[f(a_i)]_{\mathfrak{v}}$ e' il vettore delle coordinate di $f(a_i)$ rispetto alla base $\mathfrak{V}$.
Si ha

$$\begin{aligned} f(a_1) &= a_1 \frac{a_1 \cdot a_1}{a_1 \cdot a_1} = a_1, \\ f(a_2) &= a_1 \frac{a_1 \cdot a_2}{a_1 \cdot a_1} = a_1 \frac{0}{6} = 0_3, \\ f(a_3) &= a_1 \frac{a_1 \cdot a_3}{a_1 \cdot a_1} = a_1 \frac{0}{6} = 0_3. \end{aligned}$$

Dunque

$$M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Essendo L una retta per O, il suo complemento ortogonale $L^{\perp}$ e' un piano per O. Per definizione, le proiezioni ortogonali $f(x) = \mathrm{pr}_L(x)$ e $g(x) = \mathrm{pr}_{L^{\perp}}(x)$ del generico vettore $x \in \mathbb{R}^3$ sulla retta L e sul piano $L^{\perp}$ sono legate dalla relazione

$$x = f(x) + g(x);$$

dunque possiamo ricavare $g(x)$ da $f(x)$:

$$g(x) = x - f(x).$$

La matrice $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(g)$ che rappresenta la funzione $g = \mathrm{pr}_{L^{\perp}}$ rispetto alla base $\mathfrak{V}$ dei vettori a_1, a_2, a_3 e' data esplicitamente da

$$M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(g) = \left[[g(a_1)]_{\mathfrak{v}},\ [g(a_2)]_{\mathfrak{v}},\ [g(a_3)]_{\mathfrak{v}}\right].$$

Si ha

$$\begin{aligned} g(a_1) &= a_1 - f(a_1) = a_1 - a_1 = 0_3, \\ g(a_2) &= a_2 - f(a_2) = a_2 - 0_3 = a_2, \\ g(a_3) &= a_3 - f(a_3) = a_3 - 0_3 = a_3. \end{aligned}$$

Dunque

$$M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Commenti

- Il primo passo per la determinazione della matrice $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(g)$ e' consistito nel determinare i vettori $g(a_i)$. I vettori $g(a_i)$ sono stati ricavati dai vettori $f(a_i)$, usando la relazione fra le proiezioni dei vettori di $\mathbb{R}^3$ sulla retta L e sul piano $L^{\perp}$. I vettori $g(a_i)$ si potevano ricavare anche in altri modi. Nel fare i conti per determinare i vettori $f(a_i)$ si era visto che $a_1 \cdot a_2 = a_1 \cdot a_3 = 0$; cio' significa che a_2 e a_3 appartengono al piano $L^\perp$; inoltre, a_2 e a_3 sono linearmente indipendenti, dunque formano una base per $L^\perp$. Ora, la funzione g proiezione ortogonale sul piano $L^\perp$ manda ogni vettore ortogonale ad $L^\perp$ nel vettore nullo e manda ogni vettore che sta su $L^\perp$ in se', dunque

$$g(a_1) = 0_3, \quad g(a_2) = a_2, \quad g(a_3) = a_3.$$

I vettori $g(a_i)$ potevano essere determinati anche usando la formula per la proiezione ortogonale sul piano generato da due vettori, che in questo caso porge

$$g(x) = A(A^T A)^{-1} A^T x, \qquad A = [a_2, a_3]\,.$$

Questa formula pero' richiede parecchi calcoli.

- Il secondo passo per la determinazione della matrice $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(g)$ e' consistito nel determinare le coordinate dei vettori $g(a_i)$ rispetto alla base a_1, a_2, a_3. Questa operazione e' risultata particolarmente semplice, ma in generale e' piuttosto laboriosa. La determinazione delle coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^3$ rispetto ad una generica base di $\mathbb{R}^3$ richiede di risolvere un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite.