

Risoluzione esercizi della II prova parziale del 9 Gennaio 2013; tema 1.

Esercizio 3. (5 punti)

Si diagonalizzi la matrice $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$; si usi la diagonalizzazione di A per calcolare A^6 .

Risoluzione

Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} -4 - \lambda & 6 \\ -3 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2;$$

le sue radici, cioè le soluzioni dell'equazione

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$.

La matrice A ha autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$; la matrice A , essendo quadrata di ordine due ed avendo due autovalori distinti, è diagonalizzabile; inoltre, se v_1 e v_2 sono autovettori cui sono associati rispettivamente gli autovalori -1 e 2 , si ha

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{dove } P = [v_1 \ v_2], \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

L'autospazio V_{-1} associato all'autovalore -1 è l'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = -x$, cioè $(A + I_2)x = 0_2$, cioè

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0_2, \quad \text{equivalente all'unica equazione } x_1 - 2x_2 = 0;$$

questa equazione ha soluzioni del tipo $\begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t$ dove t varia in \mathbb{R} . Sia

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'autospazio V_2 associato all'autovalore 2 è l'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = 2x$, cioè $(A - 2I_2)x = 0_2$, cioè

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0_2, \quad \text{equivalente all'unica equazione } x_1 - x_2 = 0;$$

questa equazione ha soluzioni del tipo $\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$ dove t varia in \mathbb{R} . Sia

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dai punti precedenti si ha

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{dove } P = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Possiamo usare la diagonalizzazione di A per calcolare le potenze di A . Si ha

$$A^6 = PD^6P^{-1} = P \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^6 P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Dalla formula per la matrice inversa di una matrice del II ordine, si ha $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, così

$$A^6 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -62 & 126 \\ -63 & 127 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4. (5 punti)

Si determinino i valori del parametro reale k tali che la matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & k \end{bmatrix}$$

sia diagonalizzabile.

Risoluzione

Il polinomio caratteristico della matrice A_k e'

$$\det(A_k - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & k - \lambda \end{bmatrix} =$$

(sviluppando il determinante rispetto all'ultima colonna)

$$= (k - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 1) = (k - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = (k - \lambda)(\lambda - 2)\lambda;$$

dunque questo polinomio si fattorizza completamente su \mathbb{R} , e le sue radici sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, e $\lambda_3 = k$.

Per ogni valore di k con $k \neq 0, 2$, la matrice A_k quadrata del terzo ordine ha tre autovalori distinti, dunque e' diagonalizzabile. Di seguito consideriamo i casi $k = 0$ e $k = 2$.

Consideriamo la matrice

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

per quanto visto sopra, il polinomio caratteristico di A_0 si fattorizza completamente su \mathbb{R} , e gli autovalori di A_0 sono: 0 di molteplicita' algebrica $m_a(0) = 2$ e 2 di molteplicita' algebrica $m_a(2) = 1$. La molteplicita' geometrica $m_g(0)$ dell'autovalore 0 della matrice A_0 e' data da

$$m_g(0) = 3 - r(A_0 - 0I_3) = 3 - \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

dunque $m_g(0) = 2 = m_a(0)$.

La molteplicita' geometrica $m_g(2)$ dell'autovalore 2 della matrice A_0 soddisfa le relazioni $1 \leq m_g(2) \leq m_a(2) = 1$, dunque si ha $m_g(2) = 1 = m_a(2)$.

Abbiamo visto che il polinomio caratteristico di A_0 si fattorizza completamente su \mathbb{R} e che ciascuno dei due autovalori di A_0 ha molteplicita' algebrica e geometrica uguali, dunque A_0 e' diagonalizzabile.

Consideriamo la matrice

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

per quanto visto sopra, il polinomio caratteristico di A_2 si fattorizza completamente su \mathbb{R} , e gli autovalori di A_2 sono: 0 di molteplicita' algebrica $m_a(0) = 1$ e 2 di molteplicita' algebrica $m_a(2) = 2$. La molteplicita' geometrica $m_g(0)$ dell'autovalore 0 della matrice A_2 soddisfa le relazioni $1 \leq m_g(0) \leq m_a(0) = 1$, dunque si ha $m_g(0) = 1 = m_a(0)$.

La molteplicita' geometrica $m_g(2)$ dell'autovalore 2 della matrice A_2 e' data da

$$m_g(2) = 3 - r(A_2 - 2I_3) = 3 - \text{rg} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1,$$

dunque $m_g(2) = 1 < 2 = m_a(2)$.

Dunque A_2 non e' diagonalizzabile.

Esercizio 5. (5 punti)

Sia $v_1 = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$; si determini, se possibile, un vettore $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tale che v_1 e v_2 formino una base ortonormale di \mathbb{R}^2 ; si determinino le coordinate del generico vettore $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ di \mathbb{R}^2 rispetto alla base $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2\}$, e si verifichi il risultato trovato.

Risoluzione

Sia $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ un vettore di \mathbb{R}^2 .

I vettori v_1 ed x formano una base ortonormale di \mathbb{R}^2 se e solo se

$$\|v_1\| = \sqrt{(4/5)^2 + (3/5)^2} = 1, \quad (1)$$

$$v_1 \cdot x = (4/5)x_1 + (3/5)x_2 = 0 \quad (2)$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1. \quad (3)$$

La condizione (1) e' verificata. L'equazione (2) ha soluzioni del tipo

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

(infatti i vettori x ortogonali a v_1 stanno una retta per O). Sostituendo questa espressione di x nell'equazione (3), si ha l'equazione

$$5|t| = 1,$$

che ha due soluzioni $t = \pm 1/5$. Dunque

$$x = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad x = \begin{bmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}$$

(infatti su una retta ci sono esattamente due versori). Scelgo

$$v_2 = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}.$$

Sia $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ un vettore di \mathbb{R}^2 . Le coordinate di b rispetto alla base ortonormale $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2\}$ per una proposizione, sono date da

$$v_1 \cdot b = 4b_1/5 + 3b_2/5$$

$$v_2 \cdot b = -3b_1/5 + 4b_2/5.$$

Questa affermazione significa che

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = (4b_1/5 + 3b_2/5) \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} + (-3b_1/5 + 4b_2/5) \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}.$$

Svolgendo i conti al II membro si vede che questa uguaglianza e' verificata, per ogni b_1 e b_2 in \mathbb{R} . I conti vengono lasciati da fare al lettore.