Geometria e Algebra (II), Argomenti svolti

1. **Algebra delle matrici**

   Vettori riga, vettori colonna, notazione. Prodotto di un vettore riga per un vettore colonna; rappresentazione sintetica di un'equazione lineare. Notazione tipo Matlab per le entrate, le righe e le colonne di una matrice; prodotto di due matrici; rappresentazione sintetica di un sistema di equazioni lineari. Matrici unita'; associativita'; noncommutativita'. Matrice inversa, proprieta'; teorema su invertibilita' e rango; teorema su matrici invertibili e sistemi lineari; algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo della matrice inversa. Potenze naturali e intere relative di una matrice. Matrice trasposta, proprieta'. Algebra delle matrici rispetto alle operazioni di somma, prodotto per scalari e prodotto. Teorema su sistemi lineari e sottovarieta' lineari. Evoluzione di un sistema e potenze di una matrice.

2. **Determinante**

   Determinante di una matrice quadrata di ordine 2; determinante di una matrice quadrata di ordine $n = 1, 2, \ldots$, definizione ricorsiva mediante sviluppi di Laplace. Proprieta' del determinante rispetto alle righe; effetto sul determinante delle operazioni elementari sulle righe. Invarianza del determinante per trasposizione. Proprieta' del determinante rispetto alle colonne. Teorema su determinante e rango. Teorema su determinante e unicita' della soluzione di un sistema lineare; regola di Cramer. Interpolazione e determinanti di Vandermonde.

3. **Autovettori, autovalori**

   Matrici diagonali, loro proprieta' rispetto al prodotto; prodotto fra matrici e prodotto di matrici per colonne; autovettori ed autovalori di una matrice, loro uso per lo studio delle potenze della matrice.

   Come si possono determinare gli autovalori di una matrice, polinomio caratteristico. Autovettori corrispondenti ad un dato autovalore: autospazi, formula per la loro dimensione. Definizione: una matrice quadrata A e' diagonalizzabile se e solo se esistono una matrice D diagonale e una matrice P invertibile tali che $A = PDP^{-1}$. Teorema: una matrice A di ordine n e' diagonalizzabile se e solo se possiede n autovettori che formano una base di $\mathbb{R}^n$.

   Teorema: autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti; teorema: una matrice di ordine n con n autovalori distinti e' diagonalizzabile. Molteplicita' algebrica di un autovalore; molteplicita' geometrica di un autovalore, formula; teorema: la molteplicita' geometrica di un autovalore e' minore-uguale alla sua molteplicita' algebrica. Teorema: una matrice di ordine n ha n autovettori che formano una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se il suo polinomio caratteristico si fattorizza completamente su $\mathbb{R}$ e ciascun suo autovalore ha molteplicita' geometrica e algebrica uguali.

4. **Spazio Euclideo** $\mathbb{R}^n$

   Piano vettoriale geometrico $\mathfrak{P}_O$, proiezione ortogonale su una retta per O. Identificazione di $\mathfrak{P}_O$ con $\mathbb{R}^2$, rappresentazione in coordinate della relazione di ortogonalita'. Formula per la proiezione ortogonale su una retta per O. Spazio vettoriale geometrico $\mathfrak{S}_O$, proiezione ortogonale su un piano per O. Identificazione di $\mathfrak{S}_O$ con $\mathbb{R}^3$, rappresentazione in coordinate della relazione di ortogonalita'. Formula per la proiezione ortogonale di un vettore di su un piano per O. Definizione di prodotto scalare di due vettori di $\mathbb{R}^n$, sue proprieta', definizione di ortogonalita'. Complemento ortogonale di un sottinsieme; rappresentazione sintetica di un sottospazio generato da un insieme di vettori e del suo complemento ortogonale, relazione fra rango dell'insieme e loro dimensione. Proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio: definizione e formula.

   Definizione di norma di un vettore di $\mathbb{R}^n$, proprieta', disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, teorema di Pitagora. Ortogonalita' e indipendenza lineare, basi ortonormali, coordinate di un vettore rispetto ad una base ortonormale.

5. **Funzioni lineari**

   Funzione coordinata $[\,]_{\mathfrak{v}} : V \to \mathbb{R}^n$ associata ad una base $\mathfrak{V}$ di uno spazio vettoriale $n-$dimensionale V. Definizione di funzione lineare $f : V \to W$ fra due spazi vettoriali V, W. Funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ associata ad una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$; matrice $M(f)$ che rappresenta una funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Matrice $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(f)$ che rappresenta una funzione lineare $f : V \to W$ fra due spazi vettoriali V e W rispetto a una base $\mathfrak{V}$ di V ed una base $\mathfrak{W}$ di W. Immagine $\mathrm{im}f$ e nucleo $\ker f$ di una funzione lineare $f : V \to W$ fra due spazi vettoriali V e W; teorema sulla relazione fra le dimensioni di $\ker f$ e di $\mathrm{im}f$; funzioni lineari, equazioni vettoriali e sottovarieta' lineari. Caratterizzazione delle coppie di spazi vettoriali isomorfi. Relazione fra la composizione di funzioni lineari fra gli spazi vettoriali $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \ldots$ e il prodotto di matrici ad entate reali; relazione fra la composizione di funzioni lineari fra spazi vettoriali di dimensione finita e il prodotto di matrici ad entrate reali.