Esercitazione 15 Maggio 2014

Corso di Geometria - Ing. Edile - Architettura.

Esercizio 1

$T \in End(\mathbb{R}^3)$ $M_{ee}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A$

e base canonica (e_1, e_2, e_3) dello sp. vett. $\mathbb{R}^3$

a) Trovare gli autovalori di T.

b) Determinare se T è diagonalizzabile (dz).

c) Se esiste, trovare una base spettrale per T.

Traccia di risoluzione

a) $P_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 1 & 3-t & 2 \\ -1 & -1 & 0-t \end{vmatrix} =$

sviluppo con Laplace risp. alla prima riga $= (-1)^{1+1}(2-t) \begin{vmatrix} 3-t & 2 \\ -1 & 0-t \end{vmatrix} =$

$= (2-t)\left[(3-t)(-t) - (-1)(2)\right] =$

$= (2-t)\left[t^2 - 3t + 2\right] = (2-t)(t-1)(t-2) =$

$= -(t-2)^2(t-1)$

$\lambda_1 = 1$ $ma(1) = 1$ $mg(1) = 1$ poiché $1 \le mg \le ma$

$\lambda_2 = 2$ $ma(2) = 2$ $mg(2) = ?$

$mg(2) = \dim V_2$ $\quad V_2$ autospazio rel. a $\lambda=2$

$$\dim V_2 = n - \rho(A-2I) = 3-\rho(A-2I)$$

V_2 ha eq. cart. $(A-2I)\underline{x}=\underline{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per determinare il rango e risolvere il sistema riduco per righe la matrice $A-2I$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1 \leftrightarrow A_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3 \leftarrow A_3 + A_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 pivot $\Rightarrow \rho(A-2I)=1$ $\qquad mg(2) = \dim V_2 = 2$

Ora $$\sum_{\lambda \in \text{autoval}} mg(\lambda) = mg(1)+mg(2) = 1+2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

Quindi T è diagonalizzabile.

c) Trovo una base per V_2: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_2=\alpha \\ x_3=\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\alpha-2\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$$

$$\mathcal{B}_{V_2} = (v_1, v_2)$$

rovo una base anche per V_1: $(A-I)\underline{x}=\underline{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 \leftarrow A_3 + A_1]{A_2 \leftarrow A_2 - A_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3 \leftarrow A_3 + \frac{1}{2}A_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3}$$

$$\mathcal{B}_{V_1} = (v_3)$$

Una base spettrale $\mathcal{S}$ si trova unendo le due basi degli autospazi $\mathcal{S} = (v_1, v_2, v_3)$.

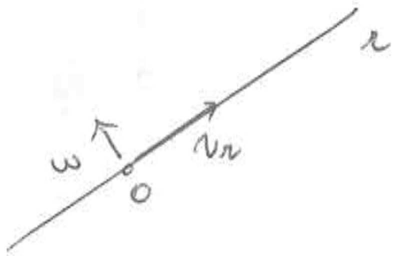
Esercizio 2 (Esercizio 1 L21-22)

Sia T l'operatore lineare, sullo spazio vettoriale $\mathcal{V}_2(O)$ dei vettori del piano applicati in un punto O, dato dalla proiezione ortogonale su una retta r per O. Si determinino autovalori ed autospazi di T.

Traccia di risoluzione

Sia v_r un vettore della direzione della retta r.

Sia w un vettore ortogonale a v_r.



Vettori multipli di v_r finiscono in se stessi attraverso la proiezione: sono autovettori relativi ad autovalore 1.

Vettori multipli di w finiscono in O. Ovvero sono autovettori relativi ad autoval 0.

Se $\mathcal{B} = (v_r, w)$ $\qquad M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ovvero l'autospazio V_1 relativo all'autovalore 1 è l'insieme dei vettori applicati in O con estremo libero su r.

L'autospazio V_0 è l'insieme dei vettori applicati in O ed ortogonali alla retta r.

Non vi sono altri autovettori.

Esercizio 3

E' assegnato l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
Dove $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ e' la base canonica.

$$e_1 \longmapsto 2e_1$$
$$e_1 + e_2 \longmapsto e_3$$
$$e_1 - e_3 \longmapsto e_2$$

a) Trovare gli autovalori di T.

b) Determinare se T e' dz.

Traccia di risoluzione

a) Per prima cosa scriviamo la matrice canonicamente associata all'endomorfismo: $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(T)$. Osserviamo che e_1, e_1+e_2 e e_1-e_3 costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, quindi le condizioni date individuano una ed una sola trasf. lin.

Dobbiamo determinare $T(e_1)$, $T(e_2)$ e $T(e_3)$:

$$T(e_1) = 2e_1 = (2,0,0)$$
$$T(e_2) = T(e_1 + e_2 - e_1) = T(e_1 + e_2) - T(e_1) = e_3 - 2e_1 = (-2,0,1)$$
$$T(e_3) = T(e_1 - (e_1 - e_3)) = T(e_1) - T(e_1 - e_3) = 2e_1 - e_2 = (2,-1,0).$$

Quindi
$$A = M_{ee}(T) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora
$$P_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 2-t & -2 & 2 \\ 0 & -t & -1 \\ 0 & 1 & -t \end{vmatrix} =$$
$$= (2-t) \begin{vmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = (2-t)(t^2+1)$$

$\lambda_1 = 2 \quad ma = 1$

non ho altri autoval

b) $\Rightarrow$ T non e' dz.

Esercizio 4

E' assegnato $T \in End(\mathbb{R}^2)$ che ha autovalori 2 e 0 ed autovettori relativi $(1,1)$ e $(1,-1)$ rispettivamente.

a) Determinare $M_{ee}(T)$

b) Dire se T è 1-1 (iniettivo), in caso negativo determinare una base per $\ker(T)$.

c) Dire se T è SU (suriettiva), in caso negativo determinare eq. cart. per $\mathrm{Im}\, T$.

Traccia di risoluzione

a) $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$ è la base spettrale

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ matrice diagonale.

$$M_{ee}(T) = M_{\mathcal{B}e}(id) \cdot M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T) \cdot M_{e\mathcal{B}}(id)$$

$\downarrow$

posso scriverla senza problemi: $M_{\mathcal{B}e}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B$

$$M_{e\mathcal{B}}(id) = M_{\mathcal{B}e}(id)^{-1} = B^{-1}$$

per calcolarla uso la formula

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot {}^t(B^{\#}).$$

$B^{\#}$ matrice dei complementi algebrici $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$t(B^{\#}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2$

$B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$

$M_{ee}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

b) $\ker T = V_0$ autosp. relativo all'autoval. <u>zero</u>.

$V_0 = L(v_2)$ dove $v_2 = (1,-1)$.

Quindi T non e' 1-1.

Una base per $\ker(T)$ e' data da v_2.

c) $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = 2 - 1 = 1$

e T non e' SU.

Inoltre <u>in questo caso</u> $\operatorname{Im} T = V_2 = L(v_1)$ autosp. rela 2. $v_1 = (1,1)$

$\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 - x_1 = 0$ eq. cart. per $\operatorname{Im}(T)$.

Alternativamente, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$T\big(a(1,1) + b(1,-1)\big) = aT(1,1) + bT(1,-1) =$$

$$= a\,(2,2) + b\,(0,0) = 2a\,(1,1).$$

Di conseguenza $\quad \mathrm{Im}(T) = \mathcal{L}\big((1,1)\big) = V_2$.