Corso di geometria - ing. edile-architettura

Esercitazione 22 Maggio 2014

Esercizio 1

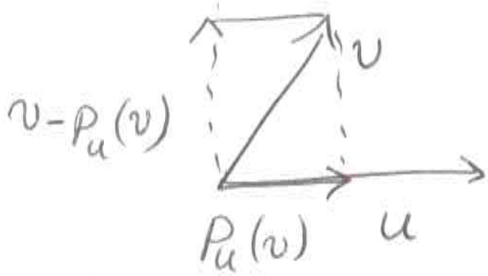
Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $u=(1,1,1,1)$ e $v=(1,2,3,4)$.

a) Determinare il vettore proiezione ortogonale di v su u.

b) Verificare il risultato trovato

Traccia di risoluzione

a) $P_u(v) = \dfrac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\cdot u.$



$$= \frac{\langle (1,2,3,4),(1,1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1,1),(1,1,1,1)\rangle}\cdot(1,1,1,1) =$$

$$= \frac{(1+2+3+4)}{1^2+1^2+1^2+1^2}(1,1,1,1) = \left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right).$$

b) verifico che $v-P_u(v)$ e' ortogonale a u:

$$\left\langle (1,2,3,4)-\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right),(1,1,1,1)\right\rangle =$$

$$=\left\langle\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),(1,1,1,1)\right\rangle = 0.$$

Esercizio 2

Nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ è assegnata la base

$$\mathcal{B} = (\underset{v_1}{\underset{\shortparallel}{(1,0,0)}}, \underset{v_2}{\underset{\shortparallel}{(1,1,0)}}, \underset{v_3}{\underset{\shortparallel}{(1,0,-1)}}).$$

Determinare una base ortonormale a partire da $\mathcal{B}$ utilizzando il metodo di Gram-Schmidt.

Traccia di svolgimento

$$f_1 = v_1 = (1,0,0)$$

$$f_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} \cdot f_1 = (1,1,0) - \frac{1}{1}(1,0,0) = (0,1,0)$$

$$f_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} f_1 - \frac{\langle v_3, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle} f_2 =$$

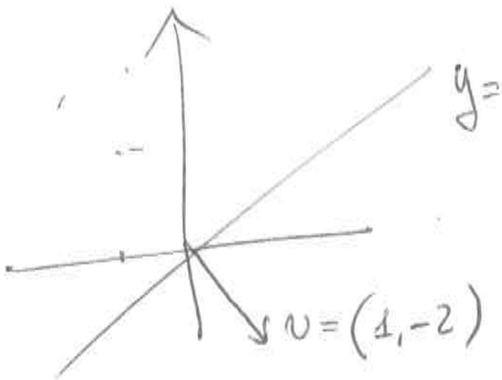
$$= (1,0,-1) - \frac{1}{1}(1,0,0) - \frac{0}{1}(0,1,0) = (0,0,-1).$$

(f_1, f_2, f_3) base ortogonale.

$$g_i = \frac{f_i}{\|f_i\|} \longrightarrow (g_1, g_2, g_3) \text{ base ortonormale.}$$

Nota su sottospazi ortogonali ed equaz. cartesiane.

Esempio sp. Vett euclideo standard $\mathbb{R}^2$.



$x - 2y = 0$

i coeff. della retta scritta in forma cartesiana implicita danno un vettore ortogonale alla retta.

$$<(1,-2),(x,y)> = x - 2y = 0$$

Osservazione Questo fatto vale in generale.

$U = L(v_1, v_2, \dots, v_k)$ in $\mathbb{R}^n$ sp. vett. euclideo standard

$U^\perp$ ha eq. cart $\begin{cases} <v_1, (x_1 \dots x_n)> = 0 \\ \vdots \\ <v_k, (x_1 \dots x_n)> = 0 \end{cases}$

Viceversa W ha eq cart

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a_1 = (a_{11} \dots a_{1n}) \\ \\ a_k = (a_{k1} \dots a_{kn}) \end{matrix}$$

allora $W^\perp = L(a_1, \dots, a_k)$.

Questo segue dal fatto che $(W^\perp)^\perp = W$.

Esercizio 3

Spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^5$.

$$U_1 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Determinare eq. param. e cart. per $U_1^\perp$ ed $U_2^\perp$.

Traccia di risoluzione:

U_1 e' rappresentato da eq. cartesiane.

I coeff. delle eq. cart. danno dei vettori che generano $U_1^\perp$.

Riesco quindi a scrivere eq. param. per $U_1^\perp$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eliminando α e β dal sistema ottengo poi le eq. cart. per $U_1^\perp$:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha + \beta \\ x_3 = 3\alpha - 2\beta \\ x_4 = 4\beta \\ x_5 = 2\alpha \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = x_1 \\ \\ \beta = \frac{1}{4} x_4 \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{1}{4} x_4 \\ x_3 = 3x_1 - \frac{1}{2} x_4 \\ x_5 = 2x_1 . \end{cases}$$

U_2 è rappresentato da eq. param.

I vettori che generano U_2 ci danno i coeff. delle eq. cart. per $U_2^{\perp}$: (v. pag. 3).

$$\begin{cases} 5x_1 \qquad - x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 0 \\ \qquad 2x_2 + x_3 \qquad\qquad\quad = 0 \end{cases}$$

Se risolvo il sistema ottengo anche delle eq. param. per $U_2^{\perp}$.

Esercizio 4

Consideriamo lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

Sia T l'operatore dato dalla simmetria rispetto alla retta $r: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinare una base spettrale ortonormale per T e scrivere la matrice associata a T rispetto a tale base;

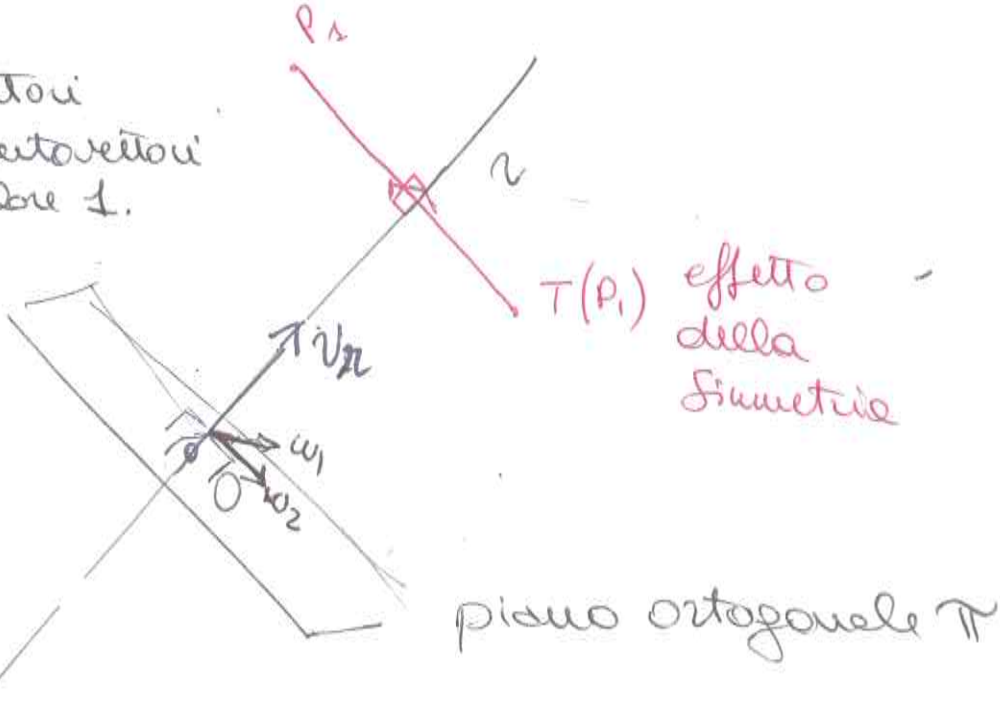
b) Verificare che T è operatore ortogonale

c) Scrivere la matrice canonicamente associata a T

Traccia di risoluzione

a)

osservo che i vettori su r sono gli autovettori relativi ad autovalore 1.



i vettori del piano π per O, ortogonale ad r, sono gli autovettori di T relativi ad autovalore -1.

$\pi: \ 2x + z = 0$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$w_1 = (0,1,0)$

$w_2 = (-1,0,2)$

$\mathcal{G} = \left(\frac{v_3}{\|v_3\|}, \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|} \right)$ e' una base spettrale ortonormale.

$M_{\mathcal{G}\mathcal{G}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ poiché $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$v_1 \mapsto v_1$

$w_1 \mapsto -w_1$

$w_2 \mapsto -w_2$.

b) NB T e' autoaggiunto poiché $M_{\mathcal{G}\mathcal{G}}(T)$ e' simmetrica rispetto a base ortonormale.

T e' operatore ortogonale poiché valgono 2 condizioni:

1) le colonne di $M_{\mathcal{G}\mathcal{G}}(T)$ costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

2) La base spettrale $\mathcal{G}$ e' ortonormale.

c)

$$M_{ee}(T) = M_{\mathcal{G}e}(id)\, M_{\mathcal{G}\mathcal{G}}(T)\, M_{e\mathcal{G}}(id)$$

$$M_{\mathcal{G}e}(id) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{e\mathcal{G}}(id) = M_{\mathcal{G}e}(id)^{-1}$$

Ma non voglio calcolare l'inversa: faccio i conti per ottenere una base spettrale ortonormale $\mathcal{B}$:

Siccome v_1, w_1 e w_2 sono già ortogonali tra loro, mi basta normalizzarli:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt5}, 0, \frac{1}{\sqrt5}\right)$$

$$u_2 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = (0, 1, 0)$$

$$u_3 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt5}, 0, \frac{2}{\sqrt5}\right)$$

$$\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$M_{ee}(T) = M_{\mathcal{B}e}(id)\, M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T) \cdot M_{e\mathcal{B}}(id)$$

$$M_{\mathcal{B}e}(id) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt5 & 0 & -1/\sqrt5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt5 & 0 & 2/\sqrt5 \end{pmatrix}$$ è matrice ortogonale! $A^{-1} = {}^tA$

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ non cambia

$$M_{e\mathcal{B}}(id) = M_{\mathcal{B}e}(id)^{-1} = {}^tM_{\mathcal{B}e}(id) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt5 & 0 & 1/\sqrt5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt5 & 0 & 2/\sqrt5 \end{pmatrix}$$

$$M_{ee}(T) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt5 & 0 & -1/\sqrt5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt5 & 0 & 2/\sqrt5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/\sqrt5 & 0 & 1/\sqrt5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/\sqrt5 & 0 & -2/\sqrt5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}$$