Esame di geometria - Ing. Edile-Architettura

Esercitazione 29 Maggio 2014

Esercizio 1

Sia $T \in End(\mathbb{R}^3)$ t.c. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$e_1 \mapsto (7,-3,-3)$

$e_2 \mapsto (-3,7,-3)$

$e_3 \mapsto (-3,-3,7)$

e base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Scrivere $M_{ee}(T)$

b) Verificare che T e' un operatore autoaggiunto

c) Calcolo gli autovalori di T

d) Trovare una base spettrale ortonormale per T.

Traccia di risoluzione

a)
$$M_{ee}(T) = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -3 & 7 & -3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix} = A$$

b) $\left.\begin{array}{l} M_{ee}(T) \text{ matrice simmetrica} \\ e \text{ base ortonormale} \end{array}\right\} \Rightarrow T$ e' autoaggiunto

c)
$$p_A(t) = \det(A-tI) = \begin{vmatrix} 7-t & -3 & -3 \\ -3 & 7-t & -3 \\ -3 & -3 & 7-t \end{vmatrix} = -(t^3-21t^2+120t-100) =$$

$$= -(t-1)(t-10)^2$$

$\lambda_1 = 1$ $m_a = 1$ $m_g = 1$ poichè $1 \leq m_g \leq m_a$

$\lambda_2 = 10$ $m_a = 2$ $m_g = 2$ per il teorema spettrale

(ogni operatore autoaggiunto e' necess. diagonalizz.) $\boxed{1}$

d) V_1: $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 \leftarrow A_3 + \frac{1}{2}A_1]{A_2 \leftarrow A_2 + \frac{1}{2}A_1} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 0 & 9/2 & -9/2 \\ 0 & -9/2 & 9/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 0 & 9/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_1}.$$

V_2: $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= v_2} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_3}$$

(v_1, v_2, v_3) base spettrale.

Trovare $v_1 \perp v_2, v_3$ siccome gli autospazi di un operatore autoaggiunto sono ortogonali tra loro.

$f_1 = v_1$ Gram Schmidt lo applico solo a v_2 e v_3!

$f_2 = v_2$

$$f_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} f_2 = (-1,0,1) - \frac{1}{2} \cdot (-1,1,0) = (-1/2, -1/2, 1)$$

$(1, 1, -2)$ per comodità.

$\sqrt{2}$

Normalizzando

$$g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$g_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$g_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3)$ base spettrale ortonormale.

Esercizio 2

$\mathbb{R}^3$ sp. vett. euclideo standard.

Forma bilineare $\phi(x,y) = 7x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_1y_3 - 3x_2y_1 + 7x_2y_2 - 3x_2y_3 - 3x_3y_1 - 3x_3y_2 + 7x_3y_3$.

a) Scrivere la matrice associata $Q_\mathcal{E}(\phi)$ dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Verifica che ϕ è simmetrica

c) Trova gli autovalori

d) Trova una base spettrale ortonormale $\mathcal{G}$ per la matrice $Q_\mathcal{E}(\phi)$.

e) Scrivi la forma bilineare rispetto alla nuova base $\mathcal{G}$.

Traccia di Soluzione

a)

$$Q_\mathcal{E}(\phi) = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -3 & 7 & -3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

b) ϕ è simmetrica poiché $\begin{cases} Q_\mathcal{E}(\phi) \text{ è matrice simmetrica} \\ \mathcal{E} \text{ base ortonormale} \end{cases}$

La matrice è volutamente uguale a quella del primo esercizio così abbiamo i conti fatti.

c) $\Lambda = \{1, 10, 10\}$ è lo spettro, ovvero l'insieme degli autovalori.

d) $\mathcal{G} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right)$

Ora

$$Q_{\mathcal{G}}(\phi) = M_{e\mathcal{G}}(id) \cdot Q_{e}(\phi) \cdot M_{\mathcal{G}e}(id)$$

$$Q_{\mathcal{G}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad M_{e\mathcal{G}}(id) = {}^t M_{\mathcal{G}e}(id), \quad M_{\mathcal{G}e}(id) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

matrice diagonale.

Di conseguenza

$$\phi(a,b) = a_1 b_1 + 10 a_2 b_2 + 10 a_3 b_3$$

è la forma bilineare scritta rispetto a $\mathcal{G}$, coi vettori $a =_{\mathcal{G}} (a_1, a_2, a_3)$ e $b =_{\mathcal{G}} (b_1, b_2, b_3)$.

Esercizio 3

Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ rappresentato canonicamente dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2c & 1 \end{pmatrix}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

a) Calcolare gli autovalori di T.

b) Quando possibile determinare una base di autovettori per T.

Traccia di svolgimento

a)
$$P_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 2c & 1-t \end{vmatrix} =$$
$$= (1-t)^2 - 2c = t^2 - 2t + (1-2c)$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - (1-2c) = 2c \quad \begin{cases} c>0 & 2 \text{ autoval distinti} \\ c=0 & 1 \text{ autoval} \\ c<0 & \text{no autoval.} \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2c}$$

b) $c<0$: non e' dz.

$c = 0$ 1 solo autoval $\lambda_1 = 1$ $m_a = 2$

V_1 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad m_g = \dim V_1 = 1 \neq m_a$

T non e' dz, ovvero non ammette base spettrale

$c > 0 \qquad \lambda_1 = 1 - \sqrt{2c} \qquad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2c}$

$$V_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2c} & 1 \\ 2c & \sqrt{2c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2c}\, x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2c}}\alpha \\ x_2 = \alpha \end{cases}$$

$$v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2c}}, 1\right)$$

V_{λ_2} conti analoghi ... $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2c}}, 1\right)$

(v_1, v_2) base di autovettori.

Esercizio 4

Sia data $A = \begin{pmatrix} -21 & 24 & -16 \\ 0 & 3 & 0 \\ 24 & -24 & 19 \end{pmatrix}$

a) Determinare quali fra i seguenti sono autovettori di A:

$v_1 = (-1, 0, 1)$ $\quad$ $v_3 = (1, 0, 1)$

$v_2 = (-2, 0, 3)$ $\quad$ $v_4 = (2, 2, 3)$

b) Sfruttando le informazioni trovate, trovare gli autovalori di A ed eventualmente una base spettrale.

Traccia di risoluzione

a) $A v_1 = \lambda v_1$?

$$\begin{pmatrix} -21 & 24 & -16 \\ 0 & 3 & 0 \\ 24 & -24 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero v_1 è autovett. rel col autoval -5.

Similmente faccio per gli altri vettori

b) $p_A(t) = \det(A - tI) = t^3 - t^2 - 21t + 45$.

So ad es. che -5 è autoval e abbasso grado con Ruffini. $\Lambda = \{-5, 3, 3\}$.

Infine trovo gli autovett. mancanti (in questo caso A è dz).