Tipologie di esercizi per l'esame di algebra e geometria per il corso di laurea in ingegneria edile architettura, AA 2013/14

Di regola in una prova d'esame ci saranno 4 esercizi di complessità simile a quella degli esercizi in questo foglio e saranno sui seguenti argomenti:

- Insiemi di generatori, lineare indipendenza, basi, dimensione;
- algebra dei sottospazi vettoriali;
- sistemi lineari, matrici e trasformazioni lineari;
- autovalori ed autovettori;
- spazi vettoriali euclidei;
- operatori lineari autoaggiunti, forme bilineari simmetriche;

Esercizio 1 - Insiemi di generatori, lineare indipendenza, basi, dimensione. Consideriamo nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ i seguenti vettori: $v_1 = (0,1,2)$, $v_2 = (1,1,1)$, $v_3 = (-2,-1,0)$, $v_4 = (3,3,2)$. Siano poi $F_1 = \{v_1, v_2\}$, $F_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $F_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ degli insiemi di vettori.

a) Per ciascuno dei tre insiemi stabilire se è linearmente indipendente;
b) per ciascuno dei tre insiemi stabilire se è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$;
c) per ciascun insieme linearmente indipendente, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ che lo contenga;
d) per ciascun sistema di generatori determinare una base di $\mathbb{R}^3$ in esso contenuta.

Esercizio 2 - Algebra dei sottospazi vettoriali. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $U = L(v_1, v_2, v_3)$ e $W = Sol(A; 0)$, dove $v_1 = (1,-1,-1,-2)$, $v_2 = (2,1,2,2)$, $v_3 = (1,2,3,4)$ e $A = (1,0,0,-1)$.

a) Determinare una base e la dimensione di U;
b) determinare una base e la dimensione di W;
c) determinare una rappresentazione cartesiana di U;
d) determinare la dimensione di $U \cap W$;
e) determinare la dimensione di $U + W$.

Esercizio 3 - Sistemi lineari, matrici e trasformazioni lineari. E' assegnato il sistema lineare:

$$\begin{cases} & & y & & & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ x & - & y & + & 4z & = & 1 \end{cases}$$

a) Trovare la soluzione del sistema in $\mathbb{R}^3$ mediante il metodo di Gauss.

b) Trovare la soluzione del sistema in $\mathbb{R}^3$ mediante il metodo di Cramer.

c) Sia A la matrice dei coefficienti associata al sistema; dopo aver determinato quali fra le seguenti matrici rappresenta A^{-1}, calcolare la soluzione del sistema sfruttando l'inversa della matrice.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -11 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -11 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4 - Autovalori ed autovettori. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che, secondo la base canonica $B = (e_1, e_2)$, è rappresentato da:

$$T(e_1) = (2 + c)e_1 + 3e_2$$

$$T(e_2) = -3e_1 + (2 - c)e_2$$

a) Determinare gli autovalori di T al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$;

b) determinare i valori di c per i quali T è diagonalizzabile;

c) per ciascuno di questi valori di c, scrivere le matrici diagonali che rappresentano T;

d) nel caso $c = 5$ scrivere una base spettrale per T e la matrice diagonale che rappresenta T rispetto a tale base.

Esercizio 5 - Spazi vettoriali euclidei. Nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (1, 0, 1, 0)$ e $b = (1, 0, 0, 1)$. Sia U il sottospazio generato da a_1 ed a_2.

a) Determinare una base ortogonale di U.

b) determinare proiezione ortogonale di b su U;

c) verificare il risultato trovato.

Esercizio 6 - Operatori lineari autoaggiunti, forme bilineari simmetriche. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ è assegnato il piano $\pi : x - y = 0$. Sia P la proiezione ortogonale sul piano π.

a) Determinare i vettori trasformati dei vettori e_1, e_2 ed e_3 della base canonica;

b) verificare che l'operatore P è autoaggiunto;

c) determina gli autovalori di P;

d) determinare una base ordinata spettrale ortonormale di P e scrivere la matrice relativa;
