20/06/2014 **Versione 1**

Prova d'esame di Geometria
per il CLM in ingegneria edile-architettura, AA 2013/14

- Sono dati 4 esercizi. Il punteggio di ciascun esercizio è indicato fra parentesi.
- Rispondere alle domande sul foglio protocollo assegnato, indicando nome, cognome e numero di matricola.
- Fornire adeguate motivazioni dei passaggi principali; non è ammesso l'uso di appunti, libri, calcolatrici, ecc.

Esercizio 1 *(8 punti)*

Sono assegnati nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ i seguenti vettori: $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (0, 0, 1)$, $v_4 = (3, 5, 2)$, $w = (0, t, 2)$.

Consideriamo gli insiemi $F_1 = \{v_1, v_2\}$, $F_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $F_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

a) Per ciascuno dei tre insiemi, stabilire se è un insieme generatore di $\mathbb{R}^3$;

b) Per ciascuno dei tre insiemi, stabilire se è un insieme linearmente indipendente;

c) Fra i tre insiemi si individui se possibile una base di $\mathbb{R}^3$, si ordini questa base e si determinino le coordinate di ciascun vettore v_i ($i = 1, 2, 3, 4$) rispetto a questa base ordinata;

d) Determinare i valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ per i quali l'insieme $\{v_1, v_2, w\}$ genera $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2 *(8 punti)*

Consideriamo la trasformazione lineare $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che sui vettori della base canonica (e_1, e_2, e_3) assume i seguenti valori:

$$T(e_1) = e_1 + 3e_2 + 5e_3$$
$$T(e_2) = 3e_1 + 5e_2 + 7e_3$$
$$T(e_3) = 5e_1 + 7e_2 + 9e_3$$

a) Determinare una base per il nucleo $Ker(T)$ di T.

b) Determinare una base per l'immagine $Im(T)$ di T.

c) Effettuare una verifica dei risultati trovati in a) e b).

d) Stabilire se il vettore $w = (0, 1, 1)$ appartiene ad $Im(T)$.

Esercizio 3 *(7 punti)*

Siano T_1 e T_2 gli operatori lineari su $\mathbb{R}^3$ rappresentati rispetto alla base canonica (e_1, e_2, e_3) rispettivamente dalle matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -10 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Per ciascun operatore,

a) determinare gli autovalori;
b) stabilire se è diagonalizzabile;
c) in caso affermativo, scrivere le matrici diagonali associate all'operatore.

Esercizio 4 *(7 punti)*

Nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ è assegnata la seguente base:

$$\mathcal{B} = ((1,1,1),(3,2,3),(4,2,-4))$$

a) Determinare una base ortogonale $\mathcal{F}$ partendo da $\mathcal{B}$ mediante il metodo di Gram-Schmidt.
b) Verificare il risultato ottenuto al punto a).
c) Determinare la proiezione del vettore $w = (0,1,1)$ sulla chiusura lineare dell'insieme costituito dai primi due vettori della base $\mathcal{B}$.
d) Verificare il risultato ottenuto al punto c).
