16/07/2014 **Versione 1**

Prova d'esame di Geometria
per il CLM in ingegneria edile-architettura, AA 2013/14

Sono dati 4 esercizi. Il punteggio di ciascun esercizio è indicato fra parentesi. Rispondere alle domande sul foglio protocollo assegnato, indicando nome, cognome e numero di matricola. Fornire le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare il metodo ed i principali passaggi usati per il calcolo del rango di una matrice).

Esercizio 1 *(8 punti)*

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $u_1 = (1, 4, 7, 6)$, $u_2 = (1, 1, -2, -2)$, $w_1 = (1, 2, 1, 0)$, $w_2 = (-1, -1, 2, 3)$ e $w_3 = (-1, 1, 8, 9)$ ed i sottospazi vettoriali $U = L(u_1, u_2)$ e $W = L(w_1, w_2, w_3)$.

a) Determinare una base e la dimensione di U;
b) determinare una base e la dimensione di W;
c) determinare la dimensione di $U + W$;
d) stabilire se la somma $U + W$ è diretta;
e) stabilire se l'insieme $E = \{u_2, w_1, w_2\}$ e' una base di $U + W$.

Esercizio 2 *(7 punti)*

E' assegnato il sistema lineare nelle incognite x, y e z:

$$S : \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$$

a) Si risolva il sistema S con il metodo di Gauss.
b) Si consideri il sistema S' ottenuto aggiungendo al sistema S la generica equazione $ax + by + cz = d$; si determinino le condizioni, sui parametri a, b, e c, sotto le quali la matrice dei coefficienti di S' risulta regolare;
c) Sotto le condizioni determinate nel punto b), si risolva il sistema S' con il metodo di Cramer.

Esercizio 3 *(8 punti)*

Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori $w = (3, 2, 1)$, $u_1 = (1, 1, 0)$ e $u_2 = (1, 0, 1)$ e il sottospazio vettoriale $U = L(u_1, u_2)$. Sia $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore proiezione ortogonale sul sottospazio U.

a) Determinare la proiezione ortogonale di w su u_1.

b) Determinare la proiezione ortogonale di w su U.

c) Scegliere una base ordinata di $\mathbb{R}^3$ e determinare la matrice associata all'operatore p_U rispetto a tale base.

Esercizio 4 *(7 punti)* Sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$ è assegnata la seguente forma bilineare simmetrica:

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2$$

a) Determinare la matrice $Q_{\mathcal{C}}(\phi)$ associata alla forma bilineare ϕ rispetto alla base canonica.

b) Determinare gli autovalori di $Q_{\mathcal{C}}(\phi)$.

c) Determinare una base ordinata ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che la matrice $Q_{\mathcal{B}}(\phi)$ sia diagonale.

d) Verificare il risultato ottenuto al punto precedente.
