12/09/2014 **Versione 2**

Prova d'esame di Geometria
per il CLM in ingegneria edile-architettura, AA 2013/14

Sono dati 4 esercizi. Il punteggio di ciascun esercizio è indicato fra parentesi. Rispondere alle domande sul foglio protocollo assegnato, indicando nome, cognome e numero di matricola. Fornire adeguate motivazioni dei passaggi principali; non è ammesso l'uso di appunti, libri, calcolatrici, ecc.

Esercizio 1 *(7 punti)*

Sono assegnati nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ i seguenti insiemi di vettori:

$$\begin{aligned}
A &= \{(1,4,6),\ (1,6,9)\}\,,\\
B &= \{(4,10,6),\ (6,15,9)\}\,,\\
C &= \{(2,4,8),\ (3,9,27),\ (4,16,64)\}\,,\\
D &= \{(2,4,3),\ (3,5,4),\ (4,6,5)\}\,,\\
E &= \{(1,2,0),\ (0,1,2),\ (1,4,4),\ (2,0,1)\}\,,\\
F &= \{(1,0,-1),\ (0,-1,1),\ (-1,1,0),\ (1,-1,0)\}\,.
\end{aligned}$$

a) Si determinino quali fra gli insiemi $A, B, \dots, F$ sono basi di $\mathbb{R}^3$;

b) Si determinino quali fra gli insiemi $A, B, \dots, F$ sono sistemi di generatori di $\mathbb{R}^3$, e per ciascuno di questi sistemi di generatori si determini una base di $\mathbb{R}^3$ che sia contenuta in esso;

c) Per ciascuno fra gli insiemi $A, B, \dots, F$ si determini se possibile una base di $\mathbb{R}^3$ che lo contenga.

Esercizio 2 *(8 punti)*

Sono date le trasformazioni lineari

$$\begin{aligned}
&S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad S(x^1, x^2, x^3) = (x^1 + x^2, x^2 + x^3)\\
&T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x^1, x^2) = (x^1 + 4x^2, -2x^1 - 5x^2, 3x^1 + 7x^2)
\end{aligned}$$

a) Si scrivano le matrici A e B che rappresentano rispetto alle basi canoniche le trasformazioni lineari S e T;

b) Per ciascuna delle due matrici BA e AB si stabilisca se è invertibile e in caso affermativo se ne determini l'inversa;

c) Per ciascuna delle due trasformazioni lineari TS e ST si stabilisca se è invertibile e in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 3 *(8 punti)*

a) Sia T l'operatore lineare su $\mathbb{R}^2$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 16 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$
Si determini se possibile una base ordinata di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di T e la matrice associata a T rispetto a tale base.

b) Per ogni $p \in \mathbb{R}$ sia T_p l'operatore lineare su $\mathbb{R}^2$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice
$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & p^2 \\ p & 1 \end{pmatrix}.$$
Si determinino i valori del parametro p per i quali l'operatore lineare T_p e' diagonalizzabile, e per ciascuno di tali valori si scrivano le matrici diagonali che rappresentano T_p.

Esercizio 4 *(7 punti)*

Nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ è assegnata la base ordinata $\mathcal{B} = ((1,1,1),\ (1,3,2),\ (1,9,4))$.

a) Determinare una base ortogonale $\mathcal{F}$ di $\mathbb{R}^3$ partendo da $\mathcal{B}$ mediante il metodo di Gram-Schmidt.

b) Verificare il risultato ottenuto al punto a).

c) Determinare una base per il sottospazio $L((1,1,1))^{\perp}$.

d) Determinare una base per il sottospazio $L((1,1,1),(1,3,2))^{\perp}$.
