16/01/2015 **Versione 1/2**

Prova d'esame di Geometria
per il CLM in ingegneria edile-architettura, AA 2013/14

Rispondere alle domande sul foglio protocollo assegnato, indicando nome, cognome e numero di matricola. Fornire adeguate motivazioni dei passaggi principali; non è ammesso l'uso di appunti, libri, calcolatrici, ecc.

Esercizio 1 *(8 punti)* Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (1,1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1,1)$ ed il sottospazio W costituito dalle soluzioni dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

a) Determinare una base di W;
b) determinare una rappresentazione cartesiana di U;
c) determinare una base di $U \cap W$;
d) determinare una base di $U + W$ che contenga una base di W.

Esercizio 2 *(7 punti)* E' dato l'endomorfismo $T_c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_c(x,y,z) = (x - y + z, x + z, -y + cz)$, dove c è un parametro in $\mathbb{R}$.

a) Si determini c in modo che T_c sia invertibile.
b) Si determinino le dimensioni di $Ker(T_c)$ e di $Im(T_c)$ al variare di c in $\mathbb{R}$.
c) Per ciascun valore di c, si determini l'insieme dei vettori $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $T_c(x,y,z) = (1,1,1)$.

Esercizio 3 *(7 punti)* E' dato l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ che sui vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica di $\mathbb{R}^3$ assume i valori $T(e_1) = 2e_1 + 2e_2$, $T(e_2) = e_1 + e_2$, $T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$.

a) Determinare gli autovalori di T.
b) Determinare se possibile una base ordinata spettrale per T e la matrice di T relativa a tale base.
c) Si stabilisca se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice di T relativa a tale base sia la matrice diagonale $diag(1,1,3)$.

Esercizio 4 *(8 punti)* Nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $a_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$, e l'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ che ammette a_1, a_2, a_3 come autovettori, con autovalori associati $-1, -1, 1$.

a) Stabilire se l'insieme $\{a_1, a_2, a_3\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
b) Determinare l'inversa della matrice A avente come colonne a_1, a_2, a_3.
c) Determinare la matrice di T relativa alla base canonica.
d) Dare una descrizione geometrica di T.