16/01/2015 **Versione 1/2**

Prova d'esame di Geometria
per il CLM in ingegneria edile-architettura, AA 2013/14

Rispondere alle domande sul foglio protocollo assegnato, indicando nome, cognome e numero di matricola. Fornire adeguate motivazioni dei passaggi principali; non è ammesso l'uso di appunti, libri, calcolatrici, ecc.

Esercizio 1 *(7 punti)* Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $a = (1, 2, 0)$, $b = (0, 3, 1)$, $c = (-1, 1, 1)$, $d = (1, 2, 1)$ e gli insiemi $B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, c\}$, $D = \{a, b, c, d\}$.

a) Quali insiemi sono linearmente indipendenti?
b) quali sono basi di $\mathbb{R}^3$?
c) quali sono sistemi di generatori di $\mathbb{R}^3$?
d) da ciascun sistema di generatori si estragga una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2 *(7 punti)* Sono date le trasformazioni lineari

$$S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \qquad S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 + x_4, -x_1 + x_2 + x_4, -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4),$$
$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(y_1, y_2, y_3) = (3y_1 + 2y_2 + y_3, 4y_1 + 3y_2 + y_3, y_1 + y_2).$$

a) Si determini una base per $\mathrm{Im}(T)$;
b) si determini una base per $\mathrm{Ker}(S)$;
c) si determini la matrice che rappresenta $T \circ S$ rispetto alle basi canoniche;
d) si determinino le dimensioni di $\mathrm{Im}(T \circ S)$ e $\mathrm{Ker}(T \circ S)$.

Esercizio 3 *(8 punti)* E' dato l'endomorfismo T_c dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ che sui vettori e_1, e_2 della base canonica di $\mathbb{R}^2$ assume i valori $T(e_1) = e_1 + pe_2$, $T(e_2) = e_1 + 2e_2$, dove p e' un parametro reale.

a) Determinare i valori di p per i quali T_p puo' essere rappresentato da una matrice diagonale;
b) per ciascuno di tali valori di p si scrivano le matrici diagonali che rappresentano T_c.

Esercizio 4 *(8 punti)* Sia T l'endomordismo dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ che e' rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare il polinomio caratteristico di A e verificare che -1 e 2 sono autovalori di A;
b) determinare se possibile una base spettrale ortonormale per T e la matrice che rappresenta T rispetto a tale base.