13/02/2015 **Versione 1/2**

Prova d'esame di Geometria
per il CLM in ingegneria edile-architettura, AA 2013/14

Rispondere alle domande sul foglio protocollo assegnato, indicando nome, cognome e numero di matricola. Fornire adeguate motivazioni dei passaggi principali; non è ammesso l'uso di appunti, libri, calcolatrici, ecc.

Esercizio 1 *(7 punti)* Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati il sottospazio U generato dai vettori $(1,0,1,0)$ e $(0,1,1,1)$, ed il sottospazio W costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

a) Si determini una base di W;
b) si determini una rappresentazione cartesiana di U;
c) si determini una base di $U + W$;
d) l'insieme $\{(-2,1,-1,1)\}$ e' una base di $U \cap W$?

Esercizio 2 *(7 punti)* Sono date le matrici A, B, C ed il vettore b

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si provi che la matrice A e' regolare;
b) si risolva il sistema $Ax = b$ usando la regola di Cramer;
c) quale fra le matrici B, C e' inversa di A?
d) si risolva il sistema $Ax = b$ usando la matrice inversa di A.

Esercizio 3 *(8 punti)* Sono dati gli endomorfismi T e T_p dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ che sono rappresentati rispetto alle base canonica di $\mathbb{R}^3$ dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

dove p e' un parametro reale.

a) Stabilire se T e' diagonalizzabile e in caso affermativo scrivere una matrice diagonale che rappresenta T;
b) determinare i valori di p per i quali T_p e' diagonalizzabile e per ciascuno di tali valori di p scrivere una matrice diagonale che rappresenta T_p.

Esercizio 4 *(8 punti)* Sia φ la forma bilineare sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_3 + x_3y_1.$$

a) Scrivere la matrice $Q_{\mathcal{C}}(\varphi)$ che rappresenta φ rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$;

b) sia T l'operatore lineare su $\mathbb{R}^3$ che e' rappresentato dalla matrice $A = Q_{\mathcal{C}}(\varphi)$ rispetto alla base canonica; determinare se possibile una base spettrale ortonormale ordinata $\mathcal{B}$ per T;

c) scrivere la matrice $Q_{\mathcal{B}}(\varphi)$ che rappresenta φ rispetto alla base $\mathcal{B}$;

d) verificare la risposta data al punto precedente.