Lezioni del 24 marzo, 26 marzo, 28 marzo.

Queste lezioni hanno come riferimento principale il primo § "Spazi Vettoriali" del Capitolo 4 "Spazi e sottospazi vettoriali".

Si sono presentati gli esempi dai quali prende le mosse la definizione di spazio vettoriale, che sono lo spazio $\mathfrak{F}(O)$ dei vettori applicati (cfr. Esempio 4.1) e lo spazio vettoriale 3-dimensionale standard $\mathbb{R}^3$ sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ (cfr. Esempio 4.4 e § 5 del Capitolo 2, con $n = 3$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). In particolare si e' dato il concetto di "combinazione lineare", e si sono discusse le combinazioni lineari di due vettori in $\mathfrak{F}(O)$ e di due terne in $\mathbb{R}^3$.

Si e' enunciato lo scopo della definizione di spazio vettoriale, come l'estensione della geometria di $\mathfrak{F}(O)$ e dell'algebra di $\mathbb{R}^3$ al caso di una qualsiasi dimensione e di un qualsiasi campo numerico.

Questa estensione richiede di approfondire il concetto di "operazione", riconsiderando le operazioni aritmetiche di somma e prodotto sugli insiemi numerici

(1) $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

e le operazioni di somma e prodotto per scalari negli spazi

(2) $\mathfrak{F}(O)$, $\mathbb{R}^3$.

Si sono presentate dunque le principali definizioni, esempi, proposizioni sulle strutture algebriche (cfr. Capitolo 2 "Strutture algebriche".) Si e' data la definizione di "operazione binaria" (cfr. § 1 "Operazioni su insiemi"); si sono date la definizioni di "gruppoide" e "gruppo", con le nozioni ed i primi fatti fondamentali ed esse collegati (cfr. § 2 "Gruppi"); si sono discussi esempi tratti da (1) e (2) (cfr. anche Esempi 2.1, 2.2, 2.3, 2.1 bis, 2.2 bis, 2.3 bis); si sono inoltre enunciate e dimostrate due proposizioni sulle equazioni e sulla leggi di cancellazione (cfr. appunti di lezione).

Si sono date le definizioni di "anello" e "campo", con le nozioni ed i primi fatti fondamentali ed esse collegati (cfr. § 3 "Anelli e campi"); in particolare si e' enunciata e dimostrata una proposizione sulla moltiplicazine per 0, e si e' enunciata una proposizione sulla relazione fra prodotto e opposti (cfr. appunti di lezione); si sono discussi esempi tratti da (1), ed un paio di altri esempi (cfr. appunti di lezione); in particolare, si e' stabilito che sono campi

$$(\mathbb{Q},+,\cdot),\ (\mathbb{R},+,\cdot),\ (\mathbb{C},+,\cdot),\ (\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+,\cdot),\ (\mathbb{Z}_2,+,\cdot);$$

non si sono presentati i concetti di "caratteristica" e "divisore dello zero".

Si e' data infine la definizione di "spazio vettoriale su un campo", e si sono presentati esempi nuovi rispetto a quelli di partenza: lo spazio vettoriale $n-$dimensionale standard $\mathbb{K}^n$ su un campo $\mathbb{K}$, lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^\infty$ delle successioni su un campo $\mathbb{K}$, lo spazio vettoriale delle funzioni da un insieme ad un campo (cfr. appunti di lezione, cfr. anche § 5 del Capitolo 2).

Per compito:

1. Sia n un numero naturale fissato e sia $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +, \cdot)$ un campo. Si mostri che l'insieme $\mathbb{K}^n$ delle n-ple ordinate con componenti in $\mathbb{K}$, con le operazioni di somma di n-ple e di prodotto di scalari per n-ple soddisfa la definizione di spazio vettoriale.

2. Si consideri l'enunciato della Proposizione 4.1, lo si verifichi nel caso dello spazio vettoriale $\mathfrak{F}(O)$ e nel caso degli spazi vettoriali $\mathbb{K}^n$, e se ne studi la dimostrazione nel caso generale.

3. Dato uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ si consideri l'equazione

   $$(1) \qquad \alpha \cdot x = w$$

   dove $\alpha \in \mathbb{K}$ e' un parametro scalare, $w \in V$ e' un parametro vettoriale, e $x \in V$ e' un vettore incognito. Sotto quali condizioni sui parametri α, w l'equazione (1) ha soluzione? Sotto quali condizioni ha una ed una sola soluzione? Come si esprime tale soluzione in funzione dei parametri?