Lezioni del 3 marzo, 5 marzo, 6 marzo.

Queste lezioni hanno come riferimento principale il § 2 ”Sottospazi”, il § 3 ”Sistemi di generatori”, il § 4 ”Dipendenza e indipendenza lineare”, del Cap. 4 ”Spazi e sottospazi vettoriali”.

Nello spazio vettoriale $\mathfrak{F}(O)$, l’insieme dei vettori che stanno su una retta per O e l’insieme dei vettori che stanno su un piano per O sono chiusi rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$. Cio’ porta alla definizione della nozione di ”sottinsieme linearmente chiuso” di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$; ogni tale sottinsieme e’ il sostegno di una struttura algebrica che e’ a sua volta uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e percio’ si dice ”sottospazio vettoriale” di V (cfr. § 2 ”Sottospazi”). Si sono presentati vari esempi: nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$, l’insieme delle soluzioni di un’equazione lineare omogenea in n incognite; nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^\infty$, l’insieme $\mathbb{K}^{(\infty)}$ delle successioni definitivamente nulle; in uno spazio vettoriale qualsiasi, l’insieme delle combinazioni lineari di un numero finito di vettori (cfr. appunti lezione). Nello spazio vettoriale $\mathfrak{F}(O)$, l’insieme $\{\underline{0}\}$, gli insiemi associati a rette e piani per O considerati sopra, e $\mathfrak{F}(O)$ stesso sono sottospazi vettoriali, e ogni sottospazio vettoriale di $\mathfrak{F}(O)$ e’ di questo tipo.

Si e’ data la definizione di ”chiusura lineare” $L(X)$ di un sottinsieme X di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$. Si sono presentati vari esempi: nello spazio vettoriale $\mathfrak{F}(O)$, un vettore non nullo, due vettori non allineati, e tre vettori non complanari hanno come chiusura lineare rispettivamente l’insieme dei vettori che stanno su una retta per O, l’insieme dei vettori che stanno su una piano per O, e l’insieme $\mathfrak{F}(O)$; nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$, la chiusura lineare dell’insieme degli n vettori aventi una componente 1 e le altre 0 e’ $\mathbb{K}^n$ stesso; nello spazio vettoriale K^∞, la chiusura lineare dell’insieme degli infiniti vettori aventi una componente 1 e le altre 0 e’ il sottospazio vettoriale $\mathbb{K}^{(\infty)}$. Si e’ enunciato che la chiusura lineare $L(X)$ di un sottinsieme X di uno spazio vettoriale V e’ il piu’ piccolo sottospazio vettoriale di V contenente X (cfr Prop. 4.3 del § 3 ”Sistemi di generatori”, senza dimostrazione).

Si e’ definita la nozione di ”sistema di generatori” di uno spazio vettoriale, e di spazio vettoriale finitamente generato. Si e’ presentato il fatto che lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^{(\infty)}$ non e’ finitamente generato. Si e’ presentato il fatto che nello spazio vettoriale $\mathfrak{F}(O)$ un insieme di vettori e’ un sistema di generatori se e solo se contiene almeno tre vettori non complanari. Si sono discussi esempi di insiemi costituiti da due, tre e quattro vettori nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ (cfr. appunti lezione). Si e’ definita la nozione di vettori ”linearmente dipendenti” o ”linearmente indipendenti”. Si e’ presentato il fatto che nello spazio vettoriale $\mathfrak{F}(O)$ due vettori sono linearmente indipendenti se e solo se non sono allineati, tre vettori sono linearmente indipendenti se e solo se non sono complanari, e quattro vettori sono sempre linearmente dipendenti. Si sono discussi esempi di insiemi costituiti da due e da tre vettori nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ (cfr. appunti lezione). Si e' discusso il caso di uno, due e tre vettori in un qualsiasi spazio vettoriale su un campo qualsiasi, e si e' mostrato che in ogni caso i vettori sono linearmente dipendenrti se e solo se fra di essi ce ne e' almeno uno che e' combinazione lineare degli altri (cfr. appunti lezione).

Per compito:

- Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ si considerino i sottinsiemi

  $$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 0\}, \quad e \quad T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

  S e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$? E T?

- Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ sono dati i vettori $a = (1,2)$, $b = (2,4)$, $c = (3,6)$, $d = (1,0)$, $e = (2,1)$, $f = (4,3)$; si considerino gli insiemi di vettori

  $$\{a\}; \ \{b,c\}; \ \{d,e\}; \ \{d,e,f\}.$$

  Per ciascun insieme, si dica se genera o meno $\mathbb{R}^2$. Per ciascun insieme, si dica se e' linearmente dipendente o indipendente.

- Si studi il § 4 "Dipendenza e indipendenza lineare", fino alla Prop. 4.7 esclusa.