Lezioni del 10 marzo, 12 marzo, 13 marzo.

Queste lezioni hanno come riferimento principale il § 5 "Basi e dimensione", il § 6 "Componenti di un vettore", il § 7 "Somma e intersezione di sottospazi", del Cap. 4 "Spazi e sottospazi vettoriali".

Ci si e' limitati a considerare spazi vettoriali finitamente generati. Si e' data la definizione di "base" di uno spazio vettoriale (cfr. definizione 4.9). Nello spazio vettoriale $\mathfrak{F}(O)$ tutti gli insiemi di tre vettori non complanari sono basi, e ogni base e' di questo tipo; nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$, una base e' data dall'insieme degli n vettori $\widetilde{\mathbf{e}}_1, \ldots \widetilde{\mathbf{e}}_n$ aventi una componente 1 e le altre 0. Ci si chiede se ogni spazio vettoriale (finitamente generato) possiede qualche base, come si costruiscono tali basi, e se tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale hanno la stessa cardinalita'.

La risposta a queste domande si basa su tre proposizioni: una afferma che in uno spazio vettoriale con un sistema di m generatori ogni insieme di $m > n$ vettori e' linearmente dipendente (cfr. lemma 4.8 e appunti lezione per l'idea della dimostrazione); una afferma che da ogni sistema di generatori linearmente dipendente si puo' togliere un vettore in modo da ottenere ancora un sistema di generatori (cfr. appunti lezione); una afferma che ad ogni sistema linearmente indipendente che non sia un sistema di generatori si puo' aggiungere un vettore in modo da ottenere ancora un insieme linearmente indipendente (cfr. appunti lezione).

Il teorema fondamentale sulle basi afferma che ogni spazio vettoriale (finitamente generato) possiede qualche base (finita), che si puo' ottenere come sottinsieme di un sistema di generatori oppure come sovrainsieme di un insieme linearmente indipendente; inoltre tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale hanno la stessa cardinalita' (cfr. teorema 4.10). La cardinalita' comune a tutte le basi di uno spazio vettoriale V viene detta "dimensione" di V. Lo spazio vettoriale $\mathfrak{F}(O)$ ha dimensione 3, i suoi sottospazi individuati dai piani per O hanno dimensione 2, i suoi sottospazi individuati dalle rette per O hanno dimensione 1, e il sottospazio ridotto al vettore nullo ha dimensione 0; lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ ha dimensione n. Se di uno spazio vettoriale si conosce la dimensione, si hanno informazioni su suoi insiemi linearmente indipendenti e sui suoi insiemi di generatori (cfr. teorema 4.11).

Nello spazio vettoriale $\mathfrak{F}(O)$, la scelta di tre vettori in un certo ordine equivale alla scelta di un sistema di riferimento, e cio' permette di identificare $\mathfrak{F}(O)$ con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. In uno spazio vettoriale V di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$, la scelta di una base ordinata permette di associare ad ogni vettore una terna di coordinate e cio' permette di identificare V con lo spazio vettoriale $n-$dimensionale standard $\mathbb{K}^n$; precisamente, si ha un "isomorfismo" da V a $\mathbb{K}^n$ (cfr. appunti lezione). In $\mathbb{K}^n$, la base ordinata $\mathcal{B} = (\widetilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{e}}_n)$ e' detta "base canonica". (cfr. § 6).

Le dimensioni dei sottospazi di una spazio vettoriale V posseggono naturali proprieta' rispetto all'inclusione fra sottospazi, e una naturale relazione sussiste fra cardinalita' di insiemi linearmente indipendenti e le dimensioni dei sottospazi che li contengono (cfr. proposizione 4.15 e corollario 4.16). Nello spazio vettoriale $\mathfrak{F}(O)$, si nota che l'intersezione di due sottospazi e' sempre un sottospazio (ad es. l'intersezione di due piani per O e' una retta per O), mentre l'unione di di due sottospazi in generale non e' un sottospazio. In uno spazio vettoriale V, si prova che l'itersezione di due sottospazi e' sempre un sottospazio, e si definisce la "somma" di due sottospazi, che risulta essere il piu' piccolo sottospazio di V che li contiene (cfr. definizione 4.13 e proposizione 4.17). Nello spazio vettoriale $\mathfrak{F}(O)$, la somma delle dimensioni di due sottospazi e' sempre uguale alla somma delle dimensioni dei sottospazi loro intersezione e loro somma. Questa relazione, detta "relazione di Grassmann", vale in qualsiasi spazio vettoriale su qualsiasi campo (cfr. teorema 4.19, senza dimostrazione). La considerazione nello spazio vettoriale $\mathfrak{F}(O)$ della configurazione di un piano per O e di una retta per O in posizione generale porta alla definizione per uno spazio vettoriale qualsiasi del concetto di "somma diretta" di due sottospazi e di "complemento" di un sottospazio; si prova che un sottospazio possiede sempre qualche complemento (cfr def. 4.14, proposizione 4.18 e appunti lezione).

Nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ i sottospazi vengono solitamente dati in due modi: come chiusura lineare di un insieme di vettori, cioe' mediante "equazioni parametriche" oppure come insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee, cioe' mediante "equazioni cartesiane". Nello spazio vettoriale R^3 a meno di situazioni degeneri si ha che l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea e' un sottospazio di dimensione 2 (un piano per O), e l'insieme delle soluzioni di un sistema di due equazioni lineari omogenee e' un sottospazio di dimensione 1 (una retta per O).

Per compito:

1. Per ciascuno dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$ si dica se e' una base di $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
&A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}, \quad con \\
&\qquad \mathbf{a}_1 = (1,2,3),\ \mathbf{a}_2 = (2,3,4); \\
&B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \}, \quad con \\
&\qquad \mathbf{b}_1 = (1,1,0),\ \mathbf{b}_2 = (0,1,1),\ \mathbf{b}_3 = (2,3,1); \\
&C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \}, \quad con \\
&\qquad \mathbf{c}_1 = (1,1,0),\ \mathbf{c}_2 = (0,1,1),\ \mathbf{c}_3 = (2,3,2); \\
&D = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4\}, \quad con \\
&\qquad \mathbf{d}_1 = (1,2,4),\ \mathbf{d}_2 = (2,4,7),\ \mathbf{d}_3 = (3,6,10),\ \mathbf{d}_4 = (4,8,13).
\end{aligned}$$

2. Per ciascuno dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$, se possibile, costruire una base di $\mathbb{R}^3$ in esso contenuta, oppure costruire una base di $\mathbb{R}^3$ che lo contenga.

$$
\begin{aligned}
A &= \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \}, \quad \textit{con} \\
&\quad \mathbf{a}_1 = (1,2,0),\ \mathbf{a}_2 = (2,1,0); \\
B &= \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \}, \quad \textit{con} \\
&\quad \mathbf{b}_1 = (10,14,18),\ \mathbf{b}_2 = (15,21,27); \\
C &= \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4\}, \quad \textit{con} \\
&\quad \mathbf{c}_1 = (1,2,0),\ \mathbf{c}_2 = (1,0,2),\ \mathbf{c}_3 = (0,1,2),\ \mathbf{c}_4 = (2,1,0).
\end{aligned}
$$

3. E' data la base ordinata di $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}), \quad \textit{con}\ \mathbf{b} = (1,0,0),\ \mathbf{c} = (1,1,0),\ \mathbf{d} = (1,1,1).$$

Si determinino le coordinate del vettore $\mathbf{f} = (4,6,9)$ rispetto a $\mathcal{B}$; si determinino le coordinate del generico vettore $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ rispetto a $\mathcal{B}$.

4. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B} = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ una base ordinata di V. Per ciascuno dei tre vettori $\mathbf{0}, \mathbf{b}, \mathbf{c} - 2\mathbf{d} - 3\mathbf{e}$ si determini la quaterna delle sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $\mathbf{u} = (1,-1,0)$, $\mathbf{v} = (0,1,-1)$, $\mathbf{w} = (-1,0,1)$; si determini la dimensione della chiusura lineare $L(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ dell'insieme dei vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v}_1 = (1,1,0),\ \mathbf{v}_2 = (0,1,1),\ \mathbf{w} = (2,5,3),\ \mathbf{z} = (2,6,3); \\
&\mathbf{a}_1 = (1,0,0),\ \mathbf{a}_2 = (1,1,0),\ \mathbf{b}_1 = (0,1,1),\ \mathbf{b}_2 = (0,0,1)
\end{aligned}
$$

e i sottospazi

$$V = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2),\ W = L(\mathbf{w}),\ Z = L(\mathbf{z}); \quad A = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2),\ B = L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Si derminino una base e la dimensione per ciascuno dei sottospazi

$$V \cap W,\ V + W; \quad V \cap Z,\ V + Z; \quad A \cap B,\ A + B.$$

Il sottospazio W e' un complemento del sottospazio V? E Z lo e'? Il sottospazio B e' un complemento del sottospazio A?

7. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e' dato il sottospazio V costituito dalle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$2x^1 + 3x^2 + 5x^3 = 0$$

nelle incognite x^1, x^2, x^3; si determinino una base e la dimensione di V. Lo stesso per il sottospazio W costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x^1 + 3x^2 + 5x^3 = 0 \\ \qquad\quad 2x^2 + 3x^3 = 0 \end{cases},$$

e per il sottospazio Z costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 = 0 \\ x^1 - x^3 = 0 \\ x^2 - x^3 = 0 \end{cases}.$$