Lezioni del 19 marzo e 20 marzo.

I riferimenti principali di queste lezioni sono i § 1 ”Matrici e loro operazioni” e § 2 ”L’anello delle matrici quadrate” del Cap. 2 ”Matrici e determinanti”.

A partire dalla relazione di proporzionalita’ diretta fra variabili reali, si sono considerate le funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ date da un polinomio omogeneo di I grado in n variabili, le funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ date da m polinomi omogenei di I grado in n variabili, e le funzioni $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ date da m polinomi omogenei di I grado in n variabili, dove $\mathbb{K}$ e’ un campo qualsiasi; queste funzioni si sono dette ”trasformazioni lineari” da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$. La composizione di due trasformazioni lineari $S : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ e $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ e’ un’applicazione $T \circ S : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^m$ che e’ ancora una trasformazione lineare (cfr. appunti lezione). Per studiare le trasformazioni lineari fra spazi vettoriali standard su un campo $\mathbb{K}$ e le operazioni su di esse, si sono introdotte le matrici a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e le operazioni su di esse.

Si e’ data la definizione formale di ”matrice di tipo $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$”, con la notazione $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ per l’insieme di tali matrici; si e’ data la notazione canonica a^i_j, a^i, a_j per gli elementi, le righe, le colonne di una matrice A (cfr. § 1, Definizione 3.1). Si e’ definito il ”prodotto naturale” di due $n-$ple, e tramite questo prodotto si e’ definito il prodotto di due matrici conformabili (cfr. § 1, Definizioni 3.6 e 3.7). Il prodotto di matrici a coefficienti in $\mathbb{K}$ generalizza ampiamente il prodotto nel campo $\mathbb{K}$. Le matrici identita’ $I_1, I_2, \ldots$ sono gli elementi neutri locali del prodotto di matrici, generalizzano il numero 1 del campo $\mathbb{K}$ (cfr. appunti lezione e § 2, inizio). Il prodotto di matrici e’ associativo, ma non commutativo (cfr. appunti lezione, § 2 Proposizione 3.2 (senza dimostrazione) e Osservazione 3.2).

Si e’ introdotta l’identificazione di sequenze ordinate con matrici colonna. Si e’ mostrato come ogni traformazione lineare $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ si possa rappresentare nella forma $T : x \to Ax$, dove x e’ una matrice colonna con n elementi variabile, e A e’ una matrice di tipo $m \times n$; inoltre $A = (T(e_1)| \ldots | T(e_n))$ e’ la matrice che ha per colonne le immagini $T(e_j)$ dei vettori della base canonica di $\mathbb{K}^n$ (cfr. appunti lezione).

Si sono definite le operazioni di somma di due matrici dello stesso tipo, di prodotto di uno scalare per una matrice, e si e’ mostrato che l’insieme $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ con queste operazioni e’ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$; l’insieme delle mn matrici E^i_j aventi una componente 1 e tutte le altre 0 e’ una base di questo spazio vettoriale, che dunque ha dimensione mn (cfr appunti lezione; § 2 Definizioni 3.4 e 3.5 e Proposizione 3.1; Capitolo 4, § 2 Esempio 4.9, e § 5 Esempio 4.9 bis). Si e’ mostrato come l’operazione di prodotto di matrici sia ben collegata alle operazioni di somma di matrici e di motiplicazione di matrici per scalari, tramite le proprieta’ distributive destra e sinistra e la proprieta’ pseudoassociativa; si sono date e dimostrate le principali proprieta’ del prodotto naturale di ennuple, dal quale le sudette proprieta’ derivano (cfr. appunti lezione, § 1 Proposizione 3.3).

Si e' evidenziato che l'insieme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, delle matrici quadrate di un dato ordine n, con le operazioni din somma e prodotto di matrici, e' un anello non commutativo; specializzando definizioni generali sui gruppoidi e sugli anelli, si e' data la definzione di "matrice invertibile" e di "matrice inversa", e si e' ottenuto il fatto che se una matrice inversa esiste essa e' unica; si e' discusso qualche esempio di matrice non invertibile (cfr. appunti lezione, § 2 Proposizione 3.5, Osservazione 3.3 e commenti seguenti).

Per compito:

1. Si calcolino tutti i possibili prodotti fra le matrici
$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Si determinino tutte le matrici che sono permutabili con la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Sia $\mathbb{K}$ un campo qualsiasi. Si dimostri che per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ si ha
$$I_m A = A = A I_n.$$

4. Per ciascuna delle seguenti matrici si dica se e' invertibile; in caso affermativo se ne calcoli la matrice inversa, e si verifichi il risultato ottenuto.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Sia $\mathbb{K}$ un campo qualsiasi. Nell'anello $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ consideri l'equazione $AX = B$, nella matrice incognita X, dove A e B sono due matrici parametri. Si mostri che se A e' invertibile, allora l'equazione ha una ed una sola soluzione, e si scriva esplicitamente tale soluzione. Sempre sotto l'ipotesi che A sia invertibile, cosa si puo' dire dell'equazione $XA = B$?

6. Siano $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ le trasformazioni lineari definite da
$$S(x^1, x^2, x^3) = (x^1 + 2x^2 + 3x^3, \ 4x^1 + 5x^2 + 6x^3)$$
$$T(x^1, x^2) = (x^1 + 2x^2, \ 3x^1 + 4x^2, \ 5x^1 + 6x^2, \ 7x^1 + 8x^2)$$

   Utilizzando il prodotto di matrici, si determini la trasformazione lineare composta $T \circ S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.