Lezioni del 24 marzo e 27 marzo.

I riferimenti principali di queste lezioni sono i § 1 "Trasformazioni lineari e isomorfismi" e § 2 "Matrici associate ad una trasformazione lineare" del Cap. 5 "Trasformazioni lineari". Tutti gli spazi vettoriali considerati sono supposti finitamente generati, su uno stesso campo $\mathbb{K}$.

A partire dal concetto di "trasformazione lineare" fra due spazi vettoriali standard $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$, si e' data la definizione generale di "trasformazione lineare" fra due spazi vettoriali su uno stesso campo, cosi' come le definizioni di omomorfismo, isomorfismo, endomorfismo, ... ad essa collegate (cfr. appunti lezione, § 1 Definizione 5.1). Oltre alle trasformazioni lineari fra due spazi vettoriali standard $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$, si sono presentati alcuni altri esempi: l'applicazione dello spazio $\mathfrak{F}(O)$ in se' data dalla proiezione ortogonale su un piano per O; la biiezione $\Phi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ fra uno spazio vettoriale $n-$dimensionale V su un campo $\mathbb{K}$ e lo spazio vettoriale standard $\mathbb{K}^n$ indotta da una base ordinata $\mathcal{B}$ di V; l'applicazione identica $Id_V : V \to V$ di uno spazio vettoriale V in se'; l'unica trasformazione lineare costante si ha quando la costante e' il vettore nullo (cfr. appunti Lezione, Esempi 5.1 e 5.2, 5.6, e Proposizione 5.8).

Si sono enunciate le prime proprieta' (cfr. Proposizione 5.2, punti (a), (b)); si sono considerate immagini e preimmagini di sottospazi tramite proiezione ortogonale (cfr. appunti Lezione), e si e' stabilito che per ciascuna trasformazione lineare $V \to W$ l'immagine di un sottospazio di V e' un sottospazio di W e la preimmagine di un sottospazio di W e' un sottospazio di V (cfr. Proposizione 5.3). Si sono definiti il nucleo Ker T e l'immagine Im T di una trasformazione lineare T, si sono studiati un paio di esempi (cfr. appunti Lezione), e si e' provato che T e' iniettiva se e solo se Ker $T = 0_V$ e che T e' suriettiva se e solo se Im $T = W$ (cfr. Proposizione 5.2 punti (c), (d)). Si e' stabilito come una trasformazione lineare si comporta su sottinsiemi del dominio che siano sistemi di generatori o insiemi linearmente indipendenti (cfr. Proposizione 5.4).

Dopo avere osservato che ogni trasformazione lineare del piano vettoriale in se' si puo' dare asegnando le immagini di due vettori non allineati (cfr. appunti Lezione), si e' enunciato il Teorema fondamentale delle trasformazioni lineari (cfr. Teorema 5.3) e si e' discusso un esempio (cfr. appunti Lezione). Dato uno spazio vettoriale $n-$dimensionale V^n e una sua base $\mathcal{B}$, ad ogni vettore v di V^n corrisponde una $n-$pla in $\mathbb{K}^n$, che viene pensata come matrice colonna ed indicata con $(v)_{\mathcal{B}}$. Dati due spazi vettoriali V^n e W^m di dimensioni n e m, una base ordinata $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ di V^n e una base ordinata $\mathcal{B}'$ di W^m, ad ogni trasformazione lineare $T : V^n \to W^m$ e' associata la matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$ di tipo $m \times n$ su $\mathbb{K}$ che ha nella prima colonna le coordinate di $T(e_1)$ rispetto a $\mathcal{B}'$, nella seconda colonna le coordinate di $T(e_2)$ rispetto a $\mathcal{B}'$, etc.:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T) = ((T(e_1))_{\mathcal{B}'} \ldots (T(e_n))_{\mathcal{B}'}) ;$$

si sono presentati un paio di esempi (cfr. appunti Lezione, Definizione 5.4). Per ogni vettore $v \in V^n$, la colonna $(T(v))_{\mathcal{B}'}$ delle coordinate di $T(v)$ rispetto a $\mathcal{B}'$ e' il prodotto della matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$ per la colonna $(v)_{\mathcal{B}}$ delle coordinate di $T(v)$ rispetto a $\mathcal{B}$:

$$(T(v))_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)\,(v)_{\mathcal{B}}$$

(cfr. Teorema 5.10). Fissate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, l'applicazione $T \mapsto M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$ e' una biiezione dall'insieme $\mathrm{Hom}(V^n, W^m)$ delle trasformazioni lineari da V^n a W^m all'insieme $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ delle matrici $m \times n$ su $\mathbb{K}$; se $V^n = W^m$ e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, in particolare si ha $M_{\mathcal{B}}(Id_V) = I_n$ (cfr. Osservazione 5.3 e 5.4).

La composizione di trasformazioni lineari e' ancora una trasformazione lineare (cfr. Proposizione 5.1). Dati tre spazi vettoriali U^p, V^n, W^m e tre loro basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$, a due trasformazioni lineari $S : U^p \to V^n$, $T : V^n \to V^m$ e alla loro composta $T \circ S : U^p \to V^m$, corrispondono due matrici e il loro prodotto:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}(T \circ S) = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}(T) M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(S).$$

(cfr. Teorema 5.11).

Per compito:

1. Per ciascuna delle seguenti funzioni si stabilisca, usando solo la definizione generale, se e' o meno una trasformazione lineare

   $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad P(x, y) = 2x + 3y;$

   $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad Q(x) = 2x + 3;$

   $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad S(x) = (x, x^2).$

2. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da

   $$T\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

   Si determini una base e la dimensione per il nucleo $\mathrm{Ker}T$ e per l'immagine $\mathrm{Im}T$.

3. Si determini la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che manda i vettori $e_1 = (1, 1)$ e $e_2 = (-1, 1)$ nei vettori $(0, -2)$ e $(2, -1)$.

4. E' data la trasformazione lineare $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cui e' associata, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, la matrice

   $$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

   Si determini la matrice che rappresenta S rispetto alla base $\mathcal{C} = ((2, 1),\ (-1, 2))$.