Lezioni del 2 aprile e 3 aprile.

I riferimenti principali di queste lezioni sono: il § 1 ″Trasformazioni lineari e isomorfismi″, il § 2 ″Matrici associate a una trasformazione lineare″, il § 3 ″Rango di una matrice″ del Cap. 5 ″Trasformazioni lineari e isomorfismi″, e il § 3 ″Matrici ridotte e trasformazioni elementari″ del Cap. 3 ″Matrici e determinanti″.

Dopo avere studiato le trasformazioni lineari da un piano allo spazio, si e′ enunciata l′equazione dimensionale per le trasformazioni lineari, e la si e′ verificata nei casi estremi di trasformazioni lineari nulle o iniettive (cfr. appunti Lezione, Teorema 5.6). Si e′ poi enunciato un corollario sulle trasformazioni lineari distinguendo i casi in cui la dimensione del dominio e′ minore, uguale o maggiore alla dimensione del codominio (cfr. appunti Lezione, Corollario 5.7, Teorema 5.9).

Si sono considerati gli isomorfismi, e si e′ osservato che l′applicazione inversa di un isomorfismo e′ un isomorfismo (cfr. Prop. 5.1 (b)). Si e′ provato che una trasformazione lineare $T : V^n \to W^n$ e′ un isomorfismo se e solo se la matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$ che la rappresenta rispetto a due basi ordinate $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di V^n e W^n e′ invertibile, e in tal caso

$$(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T))^{-1} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(T^{-1})$$

(cfr. appunti Lezione, Corollario 5.12). Si e′ enunciato per che una trasformazione lineare $T : V^n \to W^n$ da uno spazio vettoriale V^n con una base B ad uno spazio vettoriale W^n della stessa dimensione sono equivalenti le condizioni: T e′ un isomorfismo, $T(B)$ e′ linearmente indipendente, $T(B)$ e′ un sistema di generatori per W^n, e $T(B)$ e′ una base per W^n (cfr. appunti Lezione). In parallelo si e′ enunciato che per una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sono equivalenti le condizioni: (1) A e′ un invertibile, (2) le colonne di A sono linearmente indipendenti, (3) le colonne di A sono un sistema di generatori per $\mathbb{K}^n$, e (4) le colonne di A sono una base per $\mathbb{K}^n$ (cfr. appunti Lezione, Proposizione 5.13 punti (1) e (2)).

Si e′ definita la trasposta ${}^tA$ di una matrice A, si sono enunciate le principali proprieta′ dell′operazione di trasposizione, e si e′ dedotto che una matrice quadrata A e′ invertibile ed ha inversa B se e solo se la matrice ${}^tA$ e′ invertibile ed ha inversa ${}^tB$, cioe′ $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$ (cfr. Definizione 3.2, Proposizione 3.4, Proposizione 3.7). Si e′ enunciato che per una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sono equivalenti le condizioni: (1) A e′ un invertibile, (2) le righe di A sono linearmente indipendenti, (3) le righe di A sono un sistema di generatori per $\mathbb{K}^n$, (4) le righe di A sono una base per $\mathbb{K}^n$ (cfr. appunti Lezione, Proposizione 5.13 punti (1), (3)). Si e′ introdotto il termine ″matrice regolare″ come sinonimo di ″matrice invertibile″.

Si e′ data la definizione di matrice quadrata triangolare alta (cfr. appunti Lezione, Definizione 3.10), e si e′ enunciato e provato che una matrice triangolare alta e′ regolare se e solo se tutti i suoi elementi diagonali sono diversi da zero (cfr. appunti Lezione). Si sono definite le trasformazioni elementari di tipo T_1, T_2, T_3 per righe su una matrice (quadrata o meno) (cfr. Definizione 3.13). Si e' enunciato che se una matrice $\overline{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e' ottenuta da una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ mediante trasformazioni elementari per riga, allora A e' regolare se e solo se $\overline{A}$ e' regolare, (cfr. appunti Lezione). Si e' enunciato che ogni matrice quadrata e' trasformabile in una matrice triangolare alta mediante trasformazioni elementari del tipo T_1 e T_2 (cfr. appunti Lezione). Si e' visto su alcuni esempi come queste proposizioni permettano di stabilire in modo efficiente se una matrice quadrata e' regolare o meno (cfr. appunti Lezione).

Per una matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ si sono considerati lo spazio $L(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di A e lo spazio $L(a^1, \ldots, a^m) \subseteq \mathbb{K}^n$ generato dalle righe di A, si e' enunciato che tali spazi hanno la stessa dimensione, e si e' definta tale dimensione come il rango $\rho(A)$ della matrice A (cfr. appunti Lezione, Definizione 5.5, Proposizione 5.15, Osservazione 5.7). Si e' data la definizione di matrice ridotta a gradini (cfr. appunti Lezione, Definizione 3.12), e si e' illustrato su un esempio il fatto che il rango di una matrice ridotta a gradini e' il numero dei suoi pivot (cfr. appunti Lezione). Si e' enunciato che se una matrice $\overline{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e' ottenuta da una matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ mediante trasformazioni elementari per riga, allora A e $\overline{A}$ hanno lo stesso rango (cfr. appunti Lezione). Si e' enunciato che ogni matrice e' trasformabile in una matrice ridotta a gradini mediante trasformazioni elementari del tipo T_1 e T_2 (cfr. appunti Lezione, Teorema 3.9). Si e' visto su un esempio come queste proposizioni permettano di determinare in modo efficiente il rango di una matrice (cfr. appunti Lezione).

Per compito:

1. Alcune Definizioni e Proposizioni date a lezione a volte non compaiono nel testo, a volte si discostano un po' da quelle del testo, e spesso sono state enunciate in modo sintetico: scrivere per esteso le Definizioni e Proposizioni date a lezione e confrontarle con quelle del testo.

2. Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ una trasformazione lineare. Quali sono le possibili dimensioni del nucleo Ker$T$ e dell'immagine ImT di T? Per ciascuna di tali possibilita' si dia un esempio di una trasformazione lineare che la realizza.

3. E' data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$T(x^1, x^2, x^3) = (3x^2 + x^3, x^1 + 4x^3, 2x^1 + x^2).$$
Si scriva la matrice $A = M_{\widetilde{\mathcal{B}}\widetilde{\mathcal{B}}}(T)$ che rappresenta T rispetto alla base canonica $\widetilde{\mathcal{B}}$ di $\mathbb{R}^3$. Si stabilisca se la matrice A e' regolare. La trasformazione lineare T e' un isomorfismo?

4. Si stabilisca se la seguente matriice e' regolare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Si rappresentino tutte le possibili matrici di tipo 3×3 ridotte a gradini; per semplificare la rappresentazione si indichino col simbolo $\bullet$ gli elementi che devono essere diversi da zero e con $*$ gli elementi che possono assumere qualsiasi valore. Ad esempio, le matrici con un solo pivot nella prima colonna saranno rappresentate da

$$\begin{pmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Si determini il rango $\rho(A)$ della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$