Lezioni del 7 aprile, 8 aprile, 10 aprile.

Il riferimento principale di queste lezioni e' costituito dai paragrafi: § 1 ″Sistemi lineari e loro risolubilita'″ e § 2 ″Metodi di risoluzione per sistemi lineari″ del Cap. 6 ″Sistemi lineari″, § 4 ″Permutazioni″, § 5 ″Determinante di una matrice quadrata″ e § 6 ″Calcolo del determinante″ del Cap. 3 ″Matrici e determinanti″, § 3 ″Rango di una matrice″ del Cap. 5 ″Trasformazioni lineari″.

Si e' mostrato su esempi come le prime nozioni sui sistemi lineari a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ possano essere date: (1) direttamente, estendendo le nozioni familiari dall'algebra di base, oppure (2) nei termini dell'algebra delle matrici, oppure (3) nei termini di trasformazioni lineari fra spazi vettoriali standard (cfr. appunti Lezione). In generale: (1) un'equazione lineare in n incognite $x^1, \dots, x^n$ e' un'equazione del tipo $a_1x^1 + \cdots + a_nx^n = b$, dove i coefficienti $a_1, \dots, a_n$ e il termine noto b sono elementi di $\mathbb{K}$, e una sua soluzione e' una $n-$pla $\left(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n\right) \in \mathbb{K}^n$ tale che $a_1\overline{x}^1 + \cdots + a_n\overline{x}^n = b$; un sistema di m equazioni lineari in n incognite $x^1, \dots, x^n$ e' una sequenza di m equazioni lineari

$$S: \quad \begin{cases} a^1_1x^1 + \cdots + a^1_nx^n = b^1 \\ \vdots \\ a^m_1x^1 + \cdots + a^m_nx^n = b^m \end{cases}$$

dove i coefficienti $a^1_1, \dots, a^m_n$ e i termini noti $b^1, \dots, b^m$ sono elementi di $\mathbb{K}$, e una sua soluzione e' una $n-$pla $\left(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n\right) \in \mathbb{K}^n$ che sia soluzione di ciascuna equazione; il sistema lineare S e' caratterizzato dalla matrice dei coefficienti e dalla colonna dei termini noti

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m_1 & \dots & a^m_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

e si puo' identificare con questi due dati: $S = (A, b)$; (2) indicando con x la colonna delle incognite

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

ed usando il prodotto di matrici, il sistema S si puo' scrivere come

$$S: \quad Ax = b,$$

e l'insieme $Sol(S)$ delle soluzioni di S si puo' scrivere

$$Sol(S) = \{\overline{x} \in \mathbb{K}^n : \quad A\overline{x} = b\};$$

(3) al sistema S e' associata la trasformazione lineare $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definita da $T(x) = Ax$ per ogni $x \in \mathbb{K}^n$, e l'insieme $Sol(S)$ delle soluzioni di S si puo' vedere come l'insieme delle preimmagini di b :

$$Sol(S) = \{\overline{x} \in \mathbb{K}^n : \quad T(\overline{x}) = b\} = T^{-1}(b);$$

il sistema si dice possibile o consistente se $Sol(S) \neq \emptyset$ e impossibile o inconsistente in caso contrario (cfr. Definizione 6.1, Definizione 6.3).

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite $S = (A, 0)$ con colonna dei termini noti il vettore nullo 0_m di $\mathbb{K}^m$ si dice "sistema lineare omogeneo"; un tale sistema ha sempre almeno una soluzione, detta "soluzione banale": il vettore nullo 0_n di $\mathbb{K}^n$ (cfr. Def. 6.5). Si sono considerati gli insiemi delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea in due incognite, di un'equazione lineare omogenea in tre incognite, di un sistema lineare omogeneo di due equazioni in tre incognite, e si e' enunciato e dimostrato che l'insieme $Sol(S)$ delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite $S = (A, 0)$ e' un sottospazio di $\mathbb{K}^n$, ed ha dimensione $n - \rho(A)$ (cfr. appunti Lezione, Proposizione 6.1). Si e' considerato l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare consistente in due incognite, si e' definito il sistema lineare omogeneo $S_0 = (A, 0)$ associato ad un sistema lineare $S = (A, 0)$, e si e' enunciato e dimostrato che l'insieme delle soluzioni $Sol(S)$ si puo' rappresentare nella forma $Sol(S) = \overline{x} + Sol(S_0)$ dove $\overline{x}$ e' una qualsiasi soluzione particolare di S (cfr. appunti Lezione, Definizione 6.6, Teorema 6.3). Si e' enunciato e dimostrato che un sistema lineare $Ax = b$ con matrice dei coefficienti A regolare ha una ed una sola soluzione, data da $x = A^{-1}b$ (cfr. appunti Lezione, Definizione 6.7, Proposizione 6.5 parte (')). Ci si e' posto dunque per una matrice quadrata $A = (a^i_j)$ il problema di determinare sotto quali condizioni sugli elementi a^i_j la matrice A e' regolare, di determinare una formula per la matrice inversa A^{-1}, e di determinare una formula per le soluzioni del sistema $Ax = b$.

Per una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix} = (a|b)$$

ad elementi in $\mathbb{R}$ si e' illlustrato il fatto che le colonne a e b di A sono linearmente dipendenti se e solo se $a^1b^2 - b^1a^2 = 0$, e che in generale $a^1b^2 - b^1a^2$ e' la misura con segno, rispetto all'unita' d'area del riferimento, dell'area del parallelogramma di lati a e b, (cfr. appunti Lezione). Per una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ad elementi a, b, c, d in un campo $\mathbb{K}$ si e' definito il determinante di A come l'elemento $\det(A)$ di $\mathbb{K}$ dato da $\det(A) = ad - bc$, e si e' osservato che $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$, che il determinante di una matrice triangolare e' il prodotto dei suoi due elementi diagonali, e dunque che $\det(I_2) = 1$ (cfr. appunti Lezione). Rappresentata la generica matrice in $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ nella forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} = (a_1|a_2)$$

si sono enunciate le proprieta' del determinate $\det(A)$ come funzione $\det(a_1|a_2)$ delle due colonne a_1, a_2 di A : bilinearita', alternanza e antisimmetria; il determinante possiede analoghe proprieta' rispetto alle righe (cfr. appunti Lezione). Si e' enunciato e dimostrato che: (1) una matrice triangolare e' regolare se e solo se il suo determinante e' diverso da zero; (2) la proprieta' che il determinante sia diverso da zero e' invariante rispetto alle trasformazioni elementari per righe T_1, T_2, T_3; (3) una matrice e' regolare se e solo se il suo determinante e' diverso da zero (cfr. appunti Lezione). Si e' enunciato che $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ per ogni $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ e lo si e' verificato per matrici triangolari (cfr. appunti Lezione). Si e' considerato il generico sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 = b^1 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 = b^2 \end{cases}$$

a coefficienti a_j^i e b^i in un campo $\mathbb{K}$, lo si e' rappresentato nella forma

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 = b$$

dove $a_1, a_2, b \in \mathbb{K}^2$, e si sono usate le proprieta' del determinante per provare che sotto la condizione $\det(a_1|a_2) \neq 0$ l'unica soluzione del sistema e' data dalla regola di Cramer:

$$x^1 = \frac{\det(b|a_2)}{\det(a_1|a_2)}, \qquad x^2 = \frac{\det(a_1|b)}{\det(a_1|a_2)}$$

(cfr. appunti Lezione). Data una matrice regolare

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ad elementi a, b, c, d in un campo $\mathbb{K}$, si e' considerata la trasformazione lineare $T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ definita da $T(x) = Ax$ per ogni $x \in \mathbb{K}^2$, si e' usata la regola di Cramer per determinare la trasformazione lineare inversa $T^{-1} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ e si e' ricavata una formula per la matrice inversa A^{-1} :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(cfr. appunti Lezione).

Per una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \\ c \end{pmatrix}$$

ad elementi in $\mathbb{R}$ si e' definito il determinate di A come il numero reale

$$\det(A) = \sum \pm a_i b_j c_k$$

dove la terna ijk varia fra le permutazioni della terna 123 e il segno e' + o - secondo che il numero delle inversioni di ijk rispetto ad 123 sia pari o dispari, e si e' data la regola mnemonica di Sarrus (cfr. appunti Lezione, Esempio 3.4 (c)); si e' illlustrato il fatto che $\det(A)$ e' la misura con segno, rispetto all'unita' di volume del riferimento, del volume del parallelepipedo di lati a, b, c (cfr. appunti Lezione).

Per una matrice $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si e' definito il determinante di A come l'elemento di $\mathbb{K}$ indicato con $\det(A)$ o $|a^i_j|$ dato da

$$\det(A) = |a^i_j| = \sum \pm a^1_{j_1} a^2_{j_2} \cdots a^n_{j_n}$$

dove la $n-$pla $j_1 j_2 \ldots j_n$ varia fra le permutazioni della $n-$pla $12 \ldots n$ e il segno e' + o - secondo che il numero delle inversioni di $j_1 j_2 \ldots j_n$ rispetto ad $12 \ldots n$ sia pari o dispari, si e' osservato che $\det(A)$ e' la somma di $n!$ termini, si e' enunciato che $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$, e si e' provato che il determinante di una matrice triangolare e' il prodotto dei suoi n elementi diagonali, e dunque che $\det(I_n) = 1$ (cfr. appunti Lezione, Definizioni 3.14 e 3.15, Teorema 3.10, Definizioni 3.16, 3.17 e 3.19, Proposizione 3.14). Rappresentata la generica matrice in $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nella forma

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \ldots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & \ldots & a^n_n \end{pmatrix} = (a_1 | \ldots | a_n)$$

si sono enunciate le proprieta' del determinate $\det(A)$ come funzione $\det(a_1 | \ldots | a_n)$ delle n colonne $a_1, \ldots, a_n$ di A : multilinearita', alternanza e antisimmetria; il determinante possiede analoghe proprieta' rispetto alle righe (cfr. appunti Lezione, Proprieta' IV'' e IV', III e II). Si e' enunciato e dimostrato che: (1) una matrice triangolare e' regolare se e solo se il suo determinante e' diverso da zero (cfr. appunti Lezione, Proposizione 3.16); (2) la proprieta' che il determinante sia diverso da zero e' invariante rispetto alle trasformazioni elementari per righe T_1, T_2, T_3 (cfr. appunti Lezione, Proprieta' VI); (3) una matrice e' regolare se e solo se il suo determinante e' diverso da zero (cfr. appunti Lezione). Si e' mostrato su un esempio come si possano usare le trasformazioni elementari per riga per calcolare il determinante di una matrice (cfr. appunti Lezione, Esempio dopo Proposizione 6.1). Si e' enunciato il teorema di Binet $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ per ogni $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (cfr. appunti Lezione, Proposizione 3.15). Si e' considerato il generico sistema lineare di n equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a^1_1 x^1 + \cdots + a^1_n x^n = b^1 \\ \vdots \\ a^n_1 x^1 + \cdots + a^n_n x^n = b^n \end{cases}$$

a coefficienti a^i_j e b^i in un campo $\mathbb{K}$, lo si e' rappresentato nella forma

$$a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n = b$$

dove $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{K}^n$, e si sono usate le proprieta' del determinante per provare che sotto la condizione $\det(a_1 | \ldots | a_n) \neq 0$ l'unica soluzione del sistema e' data dalla regola di Cramer:

$$x^i = \frac{\det(\ldots | a_{i-1} | b | a_{i+1} | \ldots)}{\det(\ldots | a_{i-1} | a_i | a_{i+1} | \ldots)}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

(cfr. appunti Lezione, Proposizione 6.5 punto ('')).

Si sono definite le sottomatrici e i minori di una matrice (cfr. Definizione 3.20), si e' mostrato su un esempio che in una matrice ridotta a gradini il numero dei pivot e' uguale al massimo ordine di un minore con determinante diverso da zero, e si e' enunciato che il rango di una matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e' uguale al massimo ordine di un minore di A avente determinante diverso da zero (cfr. appunti Lezione, Proposizione 5.18 punti (1) e (2)).

Per compito:

1. Per ciascuno dei seguenti sistemi lineari omogenei nelle incognite x^1, x^2, x^3, x^4 si determini la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} x^1 - x^4 = 0 \\ x^2 - x^4 = 0 \\ x^1 - x^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^1 + x^2 + x^4 = 0 \\ x^1 - x^3 = 0 \\ x^2 + x^3 + x^4 = 0 \end{cases}$$

2. Si risolva il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, usando la regola di Cramer.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 3x + 9y = 2 \end{cases}$$

3. Per ciascuna delle seguenti matrici si dica se e' invertibile, in caso affermativo si determini la sua inversa, e si verifichi che lo e' usando la definizione.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

4. Si determinino i valori del parametro reale t per i quali la seguente matrice e' regolare.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & t & t^2 \end{pmatrix}.$$

5. Si calcoli il determinante della seguente matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$