Lezioni del 14 aprile, 16 aprile, 17 aprile.

Il riferimento principale di queste lezioni e' costituito dai paragrafi: § 1 "Sistemi lineari e loro risolubilita'," § 2 "Metodi di risoluzione per sistemi lineari" (solo Algoritmo B), § 3 "Rappresentazione di sottospazi vettoriali" del Cap. 6 "Sistemi lineari", e § 6 "Calcolo del determinante" del Cap. 3 "Matrici e determinanti".

Si e' mostrato su un esempio di un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite come opera il procedimento di Gauss per la risoluzione di un sistema lineare; il procedimento e' stato descritto nella sua forma piu' elementare (cfr. appunti lezione). Si sono introdotte le definizioni e presentati i fatti necessari per descrivere il procedimento di Gauss nella sua forma piu' efficiente e generale: (1) si sono definite le trasformazioni elementari per equazioni lineari e si e' enunciato il fatto che lasciano invariato l'insieme delle soluzioni di un sistema; (2) si e' considerata la corrispondenza fra sistemi lineari e matrici che associa ad un sistema $S = (A, b)$ la matrice completa $(A|b)$; (3) si e' enunciato che in questa corrispondenza alle trasformazioni elementari sulle equazioni di un sistema corrispondono le trasformazioni elementari sulle righe di una matrice; (4) si sono considerati i sistemi lineari che hanno una matrice completa ridotta a gradini, e si e' mostrato come per tali sistemi sia immediato riconoscere se siano possibili o meno, e in caso affermativo determinarne le soluzioni (cfr. appunti lezione). Si e' descritto il procedimento di Gauss nella sua forma piu' efficiente e generale: (1) dato un sistema lineare $S = (A, b)$ di m equazioni in n incognite $x^1, \ldots x^n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$, si considera la sua matrice completa $(A|b)$, a questa matrice si applicano trasformazioni elementari per riga per ottenere una matrice ridotta a gradini $(\widetilde{A}|\widetilde{b})$, e si considera il suo sistema lineare $\widetilde{S} = (\widetilde{A}|\widetilde{b})$; (2) se nella colonna $\widetilde{b}$ compare un pivot, allora nel sistema $\widetilde{S}$ compare un'equazione impossibile, dunque $\widetilde{S}$ e' impossibile, e anche S e' impossibile; (2) se tutti i pivot compaiono nelle colonne di $\widetilde{A}$, allora il sistema $\widetilde{S}$ e' possibile, precisamente se ci sono h pivot e compaiono nelle colonne $j_1 < \ldots < j_h$ allora il sistema $\widetilde{S}$ si puo' risolvere considerando le incognite $x^{j_1}, \ldots, x^{j_h}$ come incognite e le altre incognite come parametri liberi, e le soluzioni trovate sono anche le soluzioni del sistema S (cfr. appunti lezione, Algoritmo B, Esempio 6.3) [1] . Si e' applicato il procedimento su un esempio di un sistema lineare di tre equazioni in quattro incognite (cfr. appunti lezione).

[1] A lezione e' stato presentato il procedimento di Gauss, e sono state introdotte solo le definizioni e presentati solo i fatti indispensabili a tale scopo ; sul testo viene presentato il procedimento di Gauss-Jordan, che e' un perfezionamento del procedimento di Gauss, e vengono introdotte varie altre definizioni e presentate varie altre proposizioni; queste definizioni e proposizioni sono da considerarsi facoltative.

A partire da una riscrittura del determinante di una matrice del terzo ordine, si sono presentati gli sviluppi di Laplace per righe e per colonne del determinante di una matrice quadrata qualsiasi (cfr. appunti lezione, Definizione 3.20, Teorema 3.17).

Si sono considerate le varie forme nelle quali si puo' presentare un sistema lineare S di m equazioni in n incognite a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + \cdots + a_n^m x^n = b^m \end{cases} \qquad a_j^i, b^i \in \mathbb{K}$$

$$a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n = b \qquad a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{K}^m$$

$$Ax = b \qquad A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

Si e' osservato che: $Sol(S) \neq \emptyset$ sse $b \in L(a_1, \ldots, a_n)$ sse $L(a_1, \ldots, a_n) = L(a_1, \ldots, a_n, b)$ sse $\dim L(a_1, \ldots, a_n) = \dim L(a_1, \ldots, a_n, b)$ sse $\rho(A) = \rho\left((A|b)\right)$; si e' cosi' dedotto il Teorema di Rouche'-Capelli: un sistema lineare $S = (A, b)$ e' possibile se e solo se $\rho(A) = \rho\left((A|b)\right)$ (cfr. appunti lezione, Proposizione 6.2). Si e' poi data una dimostrazione di questo teorema basata sul procedimento di Gauss (cfr. appunti lezione).

A partire dal fatto che il problema della risolubilita' e della risoluzione di un dato sistema lineare di m equazioni in n incognite su un campo $\mathbb{K}$ si puo' vedere come il problema della rappresentabilita' e della rappresentazione di un dato vettore come combinazione lineare di n dati vettori in $\mathbb{K}^m$, si e' formulato il problema piu' generale di studiare tutte le relazioni lineari fra i vettori che compaiono in una data sequenza di vettori in $\mathbb{K}^m$; le relazioni lineari su una sequenza di p vettori in $\mathbb{K}^m$ sono le relazioni del tipo " il $j-$mo il vettore della sequenza e' combinazione lineare dei vettori i_1-mo ... i_h-mo delle sequenza secondo i coefficienti α_1, ... α_h " (cfr. appunti lezione).

Si e' osservato che ciascuna delle tre trasformazioni elementari T per righe, ristretta alle matrici colonna con m componenti, e' un'isomorfismo $T : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$, dunque se $T:\ a_i \mapsto \widetilde{a}_i$ per $i = 1, \ldots, p$ allora ogni relazione lineare fra i vettori $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{K}^m$ e' anche una relazione lineare fra le loro immagini $\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_p \in \mathbb{K}^m$ e viceversa; questa osservazione si puo' riformulare dicendo che se una matrice A viene trasformata in una matrice $\widetilde{A}$ dall'applicazione di una o piu' trasformazioni elementari per righe, allora ogni relazione lineare fra le colonne di A e' anche una relazione lineare fra le colonne di $\widetilde{A}$ e viceversa (cfr. appunti lezione). Si e' osservato che le colonne di una matrice ridotta per righe mostrano con evidenza alcune relazioni lineari, in particolare si ha che le colonne dove stanno i pivot sono una base per lo spazio generato dalle colonne (cfr. appunti lezione). Un metodo efficiente per studiare le relazioni lineari fra p vettori di $\mathbb{K}^m$ consiste nel considerarli come colonne di una matrice in $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$, trasformare questa matrice in una matrice $\widetilde{A} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ ridotta a gradini, studiare le relazioni lineari fra le colonne di $\widetilde{A}$, e riportare queste relazioni alle colonne di A (cfr. appunti lezione).

Si sono applicati questi concetti e metodi al problema di determinare la dimensione e una base per due sottospazi e per i sottospazi loro somma e loro intersezione (cfr. appunti lezione). Nel corso della soluzione si e' visto come si possa costruire una rappresentazione cartesiana di un sottospazio, a partire da una base del sottospazio; in generale, data una base $a_1, \ldots, a_h$ di un sottospazio W di $\mathbb{K}^n$, e un vettore variabile x in $\mathbb{K}^n$, si ha che $x \in W$ se e solo se

$$\rho\left((a_1|\ldots|a_h|x)\right) = h;$$

trasformata la matrice $(a_1|\ldots|a_h|x)$ mediante trasformazioni elementari per riga in una matrice ridotta a gradini $(\widetilde{a}_1|\ldots|\widetilde{a}_h|\widetilde{x})$ si ottiene la condizione equivalente

$$\rho\left((\widetilde{a}_1|\ldots|\widetilde{a}_h|\widetilde{x})\right) = h;$$

quest'ultima condizione si esprime in modo naturale come un sistema lineare omogeneo di $n-h$ equazioni in n incognite.

Per compito:

1. Si dimostri la seguente proposizione: Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale (finitamente generato) V, con $U \subseteq W$; allora $U = W$ se e solo se $\dim(U) = \dim(W)$.

2. Si dimostri la seguente proposizione: Siano $a_1, \ldots, a_m, b$ vettori di uno spazio vettoriale V; allora $b \in L(a_1, \ldots, a_m)$ se e solo se $L(a_1, \ldots, a_m) = L(a_1, \ldots, a_m, b)$.

3. Si risolva il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z utilizzando il procedimento di Gauss.
$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 3 \\ 2x - 6y + 12z &= 9 \\ x - 6y + 18z &= 10 \end{cases}$$

4. Si determini la dimensione e una base per il sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^5$ rappresentato dalle seguenti equazioni cartesiane
$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 = 0 \\ x^1 + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 = 0 \\ \qquad x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 6x^5 = 0 \end{cases}$$

5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $a_1 = (1,2,4)$, $a_2 = (1,3,9)$, e $b = (1,1,1)$. Il vettore b appartiene alla chiusura lineare $L(a_1, a_2)$? Si determini una rappresentazione cartesiana per $L(a_1, a_2)$.

6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati il sottospazio U rappresentato dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x^1 = p + 4q \\ x^2 = p + 3q \\ x^3 = -p + 2q \\ x^4 = -p + q \end{cases}, \qquad (p, q \in \mathbb{R})$$

e il sottospazio V rappresentato dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x^1 + x^3 - 2x^4 = 0 \\ x^2 - 10x^3 + 13x^4 = 0 \end{cases}.$$

Si determini una base e la dimensione per ciascuno dei sottospazi $U, V, U + V$, $U \cap V$.

7. Usando opportuni sviluppi di Laplace, si calcoli il seguente determinante, dove $a, b, \ldots, k$ sono parametri reali.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & c \\ d & e & f & g \\ h & 0 & i & 0 \\ j & 0 & k & 0 \end{vmatrix}.$$