Lezioni del 28 aprile, 30 aprile.

Il riferimento principale di queste lezioni e' costituito da: il file "Due definizioni dell'anello dei polinomi", il § 6 "L'anello dei polinomi" del Cap 2 "Strutture algebriche", il § 1 "Radici di un polinomio" dell'Appendice A "Equazioni algebriche", il § 1 "Autovalori ed autospazi di un operatore lineare" del Cap. 7 "Autovalori ed autovettori".

Si e' mostrato come le prime nozioni e gran parte dei primi fatti sui polinomi in una indeterminata a coefficienti reali si estendano al caso di un campo qualsiasi. Si e' data la nozione di polinomio in una indeterminata t a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ come scrittura formale, si e' indicato con $\mathbb{K}[t]$ l'insieme di tali polinomi, si sono definite su questo insieme operazioni di somma e prodotto, e si e' enunciato il fatto che la struttura cosi' ottenuta e' un anello commutativo con unita'. Questo anello contiene un sottinsieme che si puo' identificare con l'anello $\mathbb{K}$ e un elemento che si puo' identificare con l'indeterminata t; ogni polinomio come scrittura formale si puo' allora identificare con una espressione finita costruita mediante operazioni di somma e prodotto a partire dagli elementi di $\mathbb{K}$ e dall'indeterminata t (cfr. file "Due definizioni dell'anello dei polinomi", prima parte del § 6 "L'anello dei polinomi"). Si e' definito il concetto di "grado di un polinomio," e se ne sono date le proprieta' (cfr. Definizione 2.14, Proposizione 2.3). Si e' osservato che i polinomi che ammettono inverso moltiplicativo sono esattamente quelli di grado zero, cioe' quelli identificabili con elementi non nulli di $\mathbb{K}$ (cfr. appunti lezione). Si e' enunciato l'"algoritmo euclideo della divisione", con le collegate nozioni di "quoziente", "resto", "divisore" (cfr. Teorema A.1, Definizione A.1). Si e' data la nozione di divisore "banale", e la definizione di polinomio "irriducibile"; si e' osservato che i polinomi di primo grado sono sempre irriducibili (cfr. Definizione A.2). Si e' data la definizione di "radice" di un polinomio, di "equazione algebrica" associata a un polinomio, e le nozioni ad esse collegate (cfr. Definizione A.3, Osservazione A.2). Si e' enunciato e dimostrato il Teorema di Ruffini; si e' mostrato un esempio di applicazione di questo teorema e della associata regola (cfr. Proposizione A.2, appunti lezione). Si e' data la definione di "molteplicita'" di una radice di un polinomio (cfr. Definizione A.4)

Si e' iniziato lo studio della struttura di una trasformazione lineare di uno spazio vettoriale V in se' - una tale trasformazione si indica solitamente col termine "endomorfismo di V" o "operatore lineare su V". Il tipo piu' semplice di operatore lineare su V e' la moltiplicazione per uno scalare fissato $\alpha \in \mathbb{K}$, un tale operatore si dice "omotetia di ragione α" e si indica con ω_α (cfr. appunti lezione). Dato un operatore lineare T su uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$, per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ si e' considerato l'insieme U_λ dei vettori di V sui quali T si comporta come un'omotetia di ragione λ, e si e' mostrato che che e' un sottospazio vettoriale di V (cfr. Proposizione 7.1). Ciascun scalare λ al quale corrisponde un sottospazio U_λ non ridotto al vettore nullo viene detto "autovalore" di T; per ciacun autovalore λ di T, il corrispondente sottospazio U_λ viene detto "autospazio" di T relativo all'autovalore λ, e i suoi vettori si dicono "autovettori" di T relativi all'autovalore λ (cfr. Definizione 7.1)

Si sono discussi questi concetti sui seguenti esempi:

(1) l'operatore lineare S, sullo spazio vettoriale $\mathfrak{F}_2(O)$ dei vettori del piano applicati in un punto O, dato dalla simmetria rispetto ad una retta r per O (si e' osservato che: tutti i vettori sulla retta r sono autovettori di S con autovalore relativo 1 e che essi costituiscono l'autospazio U_1; tutti i vettori sulla retta per O ortogonale ad r sono autovettori di S con autovalore relativo -1 e che essi costituiscono l'autospazio U_{-1}; non ci sono altri autovettori di S (cfr. appunti lezione));

(2) l'operatore lineare T sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ dato da $T(x,y) = (2x, 3y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, o in altri termini $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (si e' osservato che: i vettori $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ della base canonica di $\mathbb{R}^2$ sono autovettori di T relativi rispettivamente agli autovalori 2 e 3; si ha $U_2 = L(e_1)$ e $U_3 = L(e_2)$ (cfr. appunti lezione)).

Si e' enunciata la seguente proposizione, sulla quale si basa il procedimento standard per la ricerca degli autovalori di un operatore lineare: un sistema lineare omogeneo $Ax = 0_n$ di n equazioni in n incognite ha qualche soluzione diversa dalla soluzione banale $x = 0_n$ se e solo se $\det(A) = 0$ (cfr. appunti lezione; questa proposizione si puo' dimostrare in vari modi a partire dalla teoria svolta; un modo consiste nel considerare una matrice B triangolare alta ottenuta da A mediante trasformazioni elementari per righe ed osservare che le seguenti affermazioni sono equivalenti: (1) il sistema $Ax = 0_n$ ha soluzioni non banali; (2) il sistema $Bx = 0_n$ ha soluzioni non banali; (3) la matrice triangolare alta B ha qualche elemento diagonale uguale a zero; (4) il determinante $\det(B)$ e' uguale a zero; (5) il determinante $\det(A)$ e' uguale a zero).

Si e' svolto il seguente esercizio:

determinare autovalori e autospazi dell'operatore lineare T su $\mathbb{R}^2$ dato da

$$T(x,y) = (x + 4y, 2x + 3y), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

o in altri termini

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(si sono considerati i sottospazi U_λ dipendenti dal parametro $\lambda \in \mathbb{R}$; ciascuno di questi sottospazi risulta essere l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 2 incognite dipendente da λ; usando la proposizione sopra enunciata, si determinano i valori di λ tali che questo sistema abbia soluzioni diverse da quella banale, cioe' tali che U_λ non sia ridotto al solo vettore nullo; si trovano cosi' gli autovalori di T, che sono $\lambda = -1$ e $\lambda = 5$; ciascuno dei due autospazio U_5, U_{-1} e' dato dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in due incognite; risolvendo questi sistemi si trova che $U_5 = L(a)$, dove $a = (1,1)$ e $U_{-1} = L(b)$, dove $b = (-2,1)$; si e' infine notato che l'insieme $\{a,b\}$ e' una base di $\mathbb{R}^2$, e che la matrice che rappresenta l'operatore lineare T rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = (a,b)$ e' $M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (cfr. appunti lezione))

Si e' considerato l'operatore lineare T, sullo spazio vettoriale $\mathfrak{F}_2(O)$ dei vettori del piano applicati in un punto O, dato da una rotazione di un quarto d'angolo giro (in senso antiorario) attorno ad O, e si e' osservato che T non ha alcun autovettore e dunque non ha alcun autovalore (cfr. appunti lezione).

Si e' enunciato che ciascun insieme costituito da autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti e' linearmente indipendente, e si e' data la dimostrazione nel caso di due autovettori (cfr. Proposizione 7.2, appunti lezione). Si e' enunciato che ciascun insieme ottenuto unendo insiemi linearmente indipendenti di autovettori relativi ad autovalori distinti e' linearmente indipendente (cfr. appunti lezione).

Per compito:

1. Sia T l'operatore lineare, sullo spazio vettoriale $\mathfrak{F}_2(O)$ dei vettori del piano applicati in un punto O, dato dalla proiezione ortogonale su una retta r per O. Si determinino autovalori ed autospazi di T.

2. Si completino nei dettagli gli esempi 7.1, 7.2, 7.3 del § 1 "Autovalori ed autospazi di un operatore lineare" del Cap. 7 "Autovalori ed autovettori".

3. Sia P l'operatore lineare, sullo spazio vettoriale $\mathfrak{F}_3(O)$ dei vettori dello spazio applicati in un punto O, dato dalla proiezione ortogonale su una retta r per O. Si determinino autovalori ed autospazi di P.

4. Si determinino autovalori ed autospazi per gli operatori lineari P, Q, R sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ dati da

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= (x,y,0), &\quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \\ Q(x,y,z) &= (x,z,y), &\quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \\ R(x,y,z) &= (y,z,x), &\quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$