**Lezioni del 5 maggio, 7 maggio.**

Il riferimento principale di queste lezioni e' costituito dal § 6 "Matrici simili" e dal § 3 "Polinomio caratteristico" del Cap. 7 "Autovalori ed autovettori".

Si sono richiamate le principali definizioni, notazioni e risultati sulla rappresentazione di trasformazioni lineari mediante matrici (cfr. appunti lezione ).
(1) Dati due spazi vettoriali $V^n$ e $W^m$ di dimensioni $n$ e $m$ su un campo $\mathbb{K}$, una base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ di $V^n$ e una base $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_m)$ di $W^m$, e una trasformazione lineare $T : V^n \to W^n$, per ogni $v \in V^n$ si ha

$$(T(v))_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{BC}}(T)(v)_{\mathcal{B}},$$

dove $(v)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ e' la colonna delle coordinate di $v$ rispetto a $\mathcal{B}$, $(T(v))_{\mathcal{C}} \in \mathbb{K}^m$ e' la colonna delle coordinate di $T(v)$ rispetto a $\mathcal{C}$, e

$$M_{\mathcal{BC}}(T) = ((T(e_1))_{\mathcal{C}} \,|\, \ldots \,|\, (T(e_n))_{\mathcal{C}})\,;$$

la matrice $M_{\mathcal{BC}}(T) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e' "la matrice associata a $T$ relativamente alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$"
(2) Dati tre spazi vettoriali $V^n, W^m, Z^p$ di dimensioni $n, m, p$ su un campo $\mathbb{K}$, con basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$, e due trasformazioni lineari $T : V^n \to W^m$, $S : W^m \to Z^p$, per la trasformazione lineare composta $S \circ T : V^n \to Z^p$ si ha

$$M_{\mathcal{BD}}(S \circ T) = M_{\mathcal{CD}}(S) M_{\mathcal{BC}}(T).$$

(3) In particolare, dato uno spazio vettoriale $V^n$ di dimensione $n$ su un campo $\mathbb{K}$, con due sue basi $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ e $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$, e la trasformazione lineare identit $Id : V^n \to V^n$, per ogni $v \in V^n$ si ha

$$(v)_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{BC}}(Id)(v)_{\mathcal{B}}, \qquad dove \tag{1}$$

$$M_{\mathcal{BC}}(Id) = ((e_1)_{\mathcal{C}} \,|\, \ldots \,|\, (e_n)_{\mathcal{C}})\,; \tag{2}$$

la matrice $M_{\mathcal{BC}}(Id) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ viene indicata brevemente con $M_{\mathcal{BC}}$ e viene detta "matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$". [1] Si ha che le matrici $M_{\mathcal{BC}}$ e $M_{\mathcal{CB}}$ sono l'una l'inversa dell'altra. Come esempio, si e' considerato il caso dello spazio vettoriale $\mathfrak{F}_2(O)$ dei vettori applicati nel piano, con due basi ordinate $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ e $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$; dati i vettori di $\mathcal{C}$ in funzione dei vettori di $\mathcal{B}$, e si sono ricavate le coordinate $\begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$ in funzione delle coordinate $\begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{C}$.

Ci si e' posti il seguente problema:

---

[1] in altri termini, l'equazione (1) fornisce le coordinate rispetto a $\mathcal{C}$ in funzione delle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$, una volta che siano forniti i vettori di $\mathcal{B}$ in funzione dei vettori di $\mathcal{C}$ (cfr. la (2)).

dato un operatore lineare $T : V^n \to V^n$ quale relazione sussiste fra le matrici $M_{\mathcal{B}}(T)$ e $M_{\mathcal{B}'}(T)$ associate a $T$ relativamente a due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di $V^n$?

A tale scopo si e' considerata la sequenza di operatori lineari

$$\begin{array}{ccccccc} V^n & \xrightarrow{Id} & V^n & \xrightarrow{T} & V^n & \xrightarrow{Id} & V^n \\ \mathcal{B}' & & \mathcal{B} & & \mathcal{B} & & \mathcal{B}' \end{array}$$

e si e' dedotto che

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}'}(T) = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(T) &= M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(Id \circ T \circ Id) \\ &= M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(Id) M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T) M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(Id) \\ &= M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^{-1} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T) M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Si e' esemplificata questa relazione nel caso considerato nella lezione 7 maggio in cui $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e' l'operatore lineare definito da $T(x, y) = (x + 4y, 2x + 3y)$, e le basi ordinate sono $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (-2, 1)\}$, per le quali si ha

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La relazione fra le matrici che rappresentano uno stesso operatore lineare rispetto a basi diverse suggerisce la definizione di similitudine: date due matrici $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dice che $A$ e' simile a $A'$ e si scrive $A \sim A'$ se esiste una matrice invertibile $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che

$$A' = E^{-1} A E$$

(cfr. Definizione 7.2 ).

Si e' osservato che il sottinsieme di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ costituito dalle matrici invertibili e' un gruppo rispetto al prodotto di matrici; tale gruppo si indica con $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ e si dice gruppo lineare di ordine $n$ su $\mathbb{K}$ ( cfr. appunti lezione, Teorema 3.6 ). Questo fatto implica che la relazione di similitudine e' una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ( cfr. Definizione 1.7, Proposizione 7.4 ).

Si e' dunque potuto dire che se due matrici $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, rappresentano uno stesso operatore lineare $V^n \to V^n$ rispetto a due basi ordinate di $V^n$, allora $A$ ed $A'$ sono simili; si e' enunciato che vale anche il viceversa, senza dimostrarlo ( cfr. Teorema 7.5 ). Matrici simili hanno in comune rilevanti proprieta', e queste proprieta' hanno significato geometrico. Si e' mostrato che matrici simili hanno lo stesso determinante ( cfr. Proposizione 7.7 ); dunque si puo' definire il determinante $\det(T)$ di un operatore lineare ponendo $\det(T) = \det(A)$, dove $A$ e' una qualsiasi matrice che rappresenta $T$. Si e' enunciato che ciascun operatore lineare $T$ su $\mathfrak{F}(O)$, trasforma parallelepipedi in parallelepipedi dilatandone i volumi (con segno, rispetto a una terna di riferimento cartesiano ortogonale) secondo un coefficiente di proporzionalita', e che questo coefficiente e' il determinante $\det(T)$.

P.S.: Per applicare la formula per la relazione fra le matrici associate a un operatore lineare relativamente a due basi ordinate bisogna invertire una matrice. In precedenza si era data una formula per l'inversa di una matrice regolare $2 \times 2$; in generale si ha una formula per l'inversa di una matrice regolare $n \times n$ ( cfr. Teorema 3.19 ). Questa formula nel caso $n = 3$ si puo' esprimere come segue: l'inversa di una matrice regolare

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

e' data da

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, {}^t\!\left(A^\sharp\right),$$

dove ${}^t(A^\sharp)$ e' la trasposta della matrice

$$A^\sharp = \begin{pmatrix} (bc)_{23} & -(bc)_{13} & (bc)_{12} \\ -(ac)_{23} & (ac)_{13} & -(ac)_{12} \\ (ab)_{23} & -(ab)_{13} & (ab)_{12} \end{pmatrix},$$

e

$$(ab)_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad (ab)_{13} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \dots \quad (bc)_{23} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Dato un operatore lineare $T : V^n \to V^n$ e una base ordinata $\mathcal{B}$ di $V^n$, ci si e' chiesto come si possano descrivere i sottospazi

$$U_\lambda(T) = \{v \in V^n |\ T(v) = \lambda v\}$$

in funzione delle coordinate relative a $\mathcal{B}$; indicato con $v$ il generico vettore di $V^n$, indicata con $x$ la colonna delle coordinate di $v$ rispetto a $\mathcal{B}$, e indicata con $A = M_{\mathcal{B}}(T)$ la matrice associata a $T$ relativamente a $\mathcal{B}$, si e' osservato che la condizione $T(v) = \lambda v$ che caratterizza i vettori $v$ sui quali $T$ agisce come un'omotetia di ragione $\lambda$ si puo' scrivere in coordinate come $Ax = \lambda x$, e che a sua volta questa condizione si puo' scrivere come $(\lambda I_n - A)x = 0_n$, e si e' data la rappresentazione

$$U_\lambda(T) = \{v \equiv x |\ (\lambda I_n - A)x = 0_n\}.$$

Usando la proposizione secondo la quale un sistema lineare omogeneo di $n$ equazioni in $n$ incognite ha qualche soluzione diversa dalla soluzione banale se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti e' nullo ( cfr. appunti lezione precedente ), si e' ottenuto che lo scalare $\lambda$ e' un autovalore di $T$ se e solo se

$$\det(\lambda I_n - A) = 0.$$

Usando la proposizione sulla dimensione dei sottospazi dati dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo ( cfr. Proposizione 6.1 ) si e' ottenuto che per ciascun autovalore $\lambda$ di $T$, la dimensione dell'autospazio $U_\lambda(T)$ relativo a $\lambda$ e' data da

$$\dim U_\lambda(T) = n - \rho(\lambda I_n - A)$$

( cfr. appunti lezione, Proposizione 7.8 ).

La caratterizzazione degli autovalori di un operatore lineare suggerisce la seguente definizione: data una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $tI_n - A$ dove $t$ e' un'indeterminata si dice "matrice caratteristica" di $A$, e il suo determinante

$$\Delta_A(t) = \det(tI_n - A)$$

si dice "polinomio caratteristico" di $A$ ( cfr. Definizione 7.3 ). Si e' calcolato il polinomio caratteristico della generica matrice in $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; si e' enunciato che il polinomio caratteristico $\Delta_A(t)$ di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e' un polinomio di grado $n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$, con coefficiente principale = 1, in cui il coefficiente di $t^{n-1}$ e' l'opposto della traccia $Tr(A)$ di $A$ e il termine costante e' $(-1)^n \det(A)$ ( cfr. Osservazione 7.1 ). Si e' osservato che il polinomio carattersistico di una matrice triangolare alta $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^n \end{pmatrix}$ e' dato da $\Delta_A(t) = (t - a_1^1) \cdots (t - a_n^n)$ ( cfr. Esempio 7.9 ).

Si e' provato che matrici simili hanno lo stesso poliniomio caratteristico ( cfr. Proposizione 7.9 ), e si e' definito il polinomio caratteristico $\Delta_T(t)$ di un operatore lineare $T$ come il polinomio caratteristico di una qualsiasi matrice che rappresenti $T$ ( cfr. Definizione 7.4 ); si e' dunque ottenuto che gli autovalori di un operatore lineare sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico ( cfr. Teorema 7.10 ). Per ogni autovalore $\lambda$ di un operatore lineare $T$ si e' definita la molteplicita' geometrica $\mathrm{ma}(\lambda)$ come la dimensione $dimU_\lambda(T)$ dell'autospazio di $T$ relativo a $\lambda$ e la molteplicita' algebrica $\mathrm{ma}(\lambda)$ come la molteplicita' di $\lambda$ in quanto radice del polinomio caratteristico $\Delta_T(t)$ ( cfr. Definizione 7.5 ).

Si sono determinati gli autovalori e le rispettive molteplicita' algebriche e geometriche per gli operatori lineari su $\mathbb{R}^2$ dati da: $S(x, y) = (y, x)$, $D(x, y) = (2x, 2y)$, $N(x, y) = (2x + y, 2y)$.

Dato un operatore lineare $T$ su $V^n$, ed indicati con $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ i suoi autovalori; dalle proposizioni sulla lineare indipendenza di autovettori relativi ad autovalori distinti si e' ottenuto che $\sum_1^h \mathrm{mg}(\lambda_i) \leq n$; dalle conseguenze del Teorema di Ruffini si e' dedotto che $\sum_1^h \mathrm{ma}(\lambda_i) \leq n$ ( cfr. appunti lezione ). Si e' enunciato che per ciascun autovalore $\lambda$ di $T$, la molteplicita' geometrica e' minore-uguale della molteplicita' algebrica: $\mathrm{mg}(\lambda) \leq \mathrm{ma}(\lambda)$, senza dimostrazione ( cfr. Proposizione 7.1 ). Si sono dati esempi di operatori lineari su $V^n$ con un solo autovalore, avente molteplicita' geometrica 1 e molteplicita' algebrica n.

PS.: Nei casi concreti che considereremo, il campo $\mathbb{K}$ sara' il campo $\mathbb{R}$ dei reali. Il polinomio caratteristico di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e' un polinomio $\Delta_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ di grado $n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$, con coefficiente del termine di grado massimo uguale a 1. Per $n = 2$ si possono determinare le radici del polinomio usando la nota formula risolutiva per l'equazione generale di II grado.

Ci sono anche formule risolutive per l'equazione generale di III e IV grado. In un certo senso da specificare, si ha che non possono esistere formule risolutive per l'equazione generale di grado 5 o superiore ( cfr. Osservazione A.6 ).

Negli esempi che considereremo, le radici del polinomio caratteristico si potranno determinare scomponendolo (magari usando il teorema e la regola di Ruffini) nel prodotto di polinomi di grado al piu' 2, usando la regola di annullamento del prodotto, e dunque risolvendo equazioni di I e II grado .

I coefficienti del polinomio caratteristico saranno spesso interi, e anche le radici saranno spesso intere. Si ha che un intero $z \in \mathbb{Z}$ puo' essere una radice di un polinomio $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ a coefficienti interi $a_i \in \mathbb{Z}$ (e coefficiente principale uguale a 1) solo se $z$ divide il termine noto $a_0$ ( cfr. Teorema A.8 ).

Per compito:

1. Sia $V^3$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbb{R}$, siano $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$. due basi ordinate di $V^3$ legate dalle relazioni

$$f_1 = e_1 + e_3, \qquad f_2 = e_1 + e_2, \qquad f_3 = e_2 + e_3,$$

   e sia $P : V^3 \to V^3$ l'operatore lineare definito assegnando

$$P(e_1) = e_1, \quad P(e_2) = 0_V, \quad P(e_3) = 0_V.$$

   Si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}}(P)$ associata a $P$ relativamente alla base ordinata $\mathcal{B}$ e si determini, usando la relazione fra le matrici associate a un operatore lineare relativamente a due basi ordinate, la matrice $M_{\mathcal{B}'}(P)$ associata a $P$ relativamente alla base ordinata $\mathcal{B}'$.

2. Sia $V^3$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbb{R}$, sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ una sua base ordinata, e siano $P, Q, R, S$ gli operatori lineari su $V^3$ definiti assegnando le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$ come segue

$$\begin{array}{lll} P(e_1) = e_2, & P(e_2) = e_3, & P(e_3) = -2e_2 - 3e_3 \\ Q(e_1) = e_2, & Q(e_2) = e_3, & Q(e_3) = 3e_1 - e_2 - e_3 \\ R(e_1) = e_1, & R(e_2) = 2e_3, & R(e_3) = 2e_2 - 3e_3 \\ S(e_1) = e_1, & S(e_2) = e_1 + e_2, & S(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3. \end{array}$$

   Per ciascun operatore lineare, si determinino i suoi autovalori, e per ciascun autovalore si determini la sua molteplicita' algebrica e la sua molteplicita' geometrica.