Lezione del 12 maggio.

Il riferimento principale di questa lezione e' costituito dal § 4 "Diagonalizzazione di matrici ed operartori lineari" del Cap 7 "Autovalori ed autovettori".

1. **Teorema spettrale; I: enunciato**

   Siano dati: un operatore lineare $T : V^n \to V^n$ su uno spazio vettoriale V^n di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$, una base ordinata $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ di V^n, e la matrice $A = M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T relativamente a $\mathcal{B}$. Sia inoltre $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ una lista degli autovalori di T, nella quale ciascun autovalore di T compare una ed una sola volta.

   Consideriamo le seguenti affermazioni:

   (a) Esiste una base ordinata $\mathcal{B}'$ di V^n tale che $M_{\mathcal{B}'}(T)$ sia diagonale;

   (b) Esiste una base ordinata $\mathcal{B}'$ di V^n formata da autovettori di T;

   (c) la somma delle molteplicita' geometriche degli autovalori di T eguaglia la dimensione dello spazio:

   $$\sum_1^h \mathrm{mg}(\lambda_i) = n.$$

   Si ha il

   > **Teorema** (cfr. Teorema 7.12) Le affermazioni $(a), (b), (c)$ sono a due a due equivalenti.

   Cio' significa che ciascuna delle 3 affermazioni implica le altre; in altri termini: per ciascun dato operatore lineare T o tutte e tre le affermazioni sono vere oppure tutte e tre le affermazioni sono false.

   L'insieme degli autovalori di un operatore lineare T viene detto "spettro" di T, percio' il teorema di sopra viene detto "teorema spettrale". Un operatore lineare T per il quale e' vera una delle 3 affermazioni (e dunque tutte e 3) si dice "diagonalizzabile".

   Il teorema spettrale in realta' dice qualcosa di piu': una base ordinata $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ di V^n e' costituita da autovettori di T se e solo se la matrice $M_{\mathcal{B}'}(T)$ associata a T relativamente a $\mathcal{B}'$ e' una matrice diagonale, e in tal caso gli elementi sulla diagonale sono nell'ordine gli autovalori corrispondenti agli autovettori $f_1, f_2, \dots, f_n$.

   Dal teorema spettrale discende il seguente

Corollario (cfr. Corollario 7.13) Sia T un operatore lineare su uno spazio vettoriale di dimensione n; se T ha n autovalori distinti allora T e' diagonalizzabile.

Il teorema spettrale ha anche altre formulazioni, ad esempio ha una formulazione nella quale la l'affermazione (c) e' rimpiazzata dall'affermazione

(c') la somma delle molteplicita' algebriche degli autovalori di T eguaglia la dimensione dello spazio e ciascun autovalore λ_i ha uguale molteplicita' algebrica e geometrica:

$$\sum_1^h \mathrm{ma}(\lambda_i) = n, \qquad e \qquad \mathrm{ma}(\lambda_i) = \mathrm{ma}(\lambda_i), \quad \forall i = 1, \ldots, h.$$

2. **Teorema spettrale; II: esempi di applicazione**

Sia V^3 uno spazio vettoriale 3−dimensionale su $\mathbb{R}$ avente base ordinata $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Consideriamo gli operatori lineare $P, Q, R : V^3 \to V^3$ rappresentati rispetto a $\mathcal{B}$ dalle matrici $A = M_{\mathcal{B}}(P)$, $B = M_{\mathcal{B}}(Q)$, $C = M_{\mathcal{B}}(R)$ date da

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per ciascunno di questi operatori, ci chiediamo se e' diagonalizzabile o meno. Useremo la versione del Teorema spettrale con la condizione (c').

- La matrice caratteristica di A e'

$$tI_3 - A = \begin{pmatrix} t+1 & -1 & 2 \\ 0 & t & 2 \\ 0 & -1 & t+3 \end{pmatrix},$$

e il polinomio caratteristico dell'operatore P e' dato da

$$\Delta_P(t) = |tI_3 - A| = \begin{vmatrix} t+1 & -1 & 2 \\ 0 & t & 2 \\ 0 & -1 & t+3 \end{vmatrix};$$

iniziando col sviluppare il determinante secondo la prima colonna si ottiene

$$\begin{aligned}(t+1)\begin{vmatrix} t & 2 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix} &= (t+1)(t^2+3t+2) \\ &= (t+1)(t+1)(t+2) = (t+1)^2(t+2).\end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico $\Delta_P(t)$ ha le radici -1 e -2, di molteplicita' rispettive 2 e 1, dunque gli autovalori di P sono -1 e -2 con molteplicita' algebriche

$$\text{ma}(-1) = 2, \quad \text{ma}(-2) = 1;$$

si ha

$$\text{ma}(-1) + \text{ma}(-2) = 2 + 1 = 3,$$

la dimensione dello spazio V^3.

La molteplicita' geometrica dell'autovalore -1 e' data da

$$\text{mg}(-1) = \dim\left(U_{-1}(P)\right) = 3 - \rho\left(-I_3 - A\right);$$

si ha

$$\rho\left(-I_3 - A\right) = \rho \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1;$$

dunque $\text{mg}(-1) = 3 - 1 = 2$. In definitiva,

$$\text{mg}(-1) = 2 = \text{ma}(-1).$$

Per quanto riguarda la molteplicita' geometrica dell'autovalore -2, si ha $1 \leq \text{mg}(-2) \leq \text{ma}(-2) = 1$, dunque

$$\text{mg}(-2) = 1 = \text{ma}(-2).$$

Essendo soddisfatte le condizioni che compongono l'affermazione (c'), per il teorema spettrale possiamo affermare che l'operatore lineare P e' diagonalizzabile.

- La matrice caratteristica di B e'

$$tI_3 - B = \begin{pmatrix} t-3 & 0 & 0 \\ -1 & t-3 & 0 \\ -1 & -1 & t-2 \end{pmatrix},$$

e il polinomio caratteristico dell'operatore Q e' dato da

$$\Delta_Q(t) = |tI_3 - B| = \begin{vmatrix} t-3 & 0 & 0 \\ -1 & t-3 & 0 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-3)^2(t-2).$$

Il polinomio caratteristico $\Delta_Q(t)$ ha le radici 3 e 2, di molteplicita' rispettive 2 e 1, dunque gli autovalori di Q sono 3 e 2 con molteplicita' algebriche

$$\text{ma}(3) = 2, \quad \text{ma}(2) = 1;$$

si ha

$$\text{ma}(3) + \text{ma}(2) = 2 + 1 = 3,$$

la dimensione dello spazio V^3.
La molteplicita' geometrica dell'autovalore 3 e' data da

$$\mathrm{mg}(3) = \dim\left(U_3(Q)\right) = 3 - \rho\left(3I_3 - B\right);$$

si ha

$$\rho\left(3I_3 - B\right) = \rho\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2;$$

dunque $\mathrm{mg}(3) = 3 - 2 = 1$. In definitiva,

$$\mathrm{mg}(3) = 1 < 2 = \mathrm{ma}(3).$$

Non essendo soddisfatta una delle condizioni che compongono l'affermazione (c'), per il teorema spettrale possiamo affermare che l'operatore lineare Q non e' diagonalizzabile.

- La matrice caratteristica di C e'

$$tI_3 - C = \begin{pmatrix} t-1 & -2 & -3 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix},$$

e il polinomio caratteristico dell'operatore R e' dato da

$$\Delta_R(t) = |tI_3 - C| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -3 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix};$$

iniziando col sviluppare il determinante secondo la prima colonna si ottiene

$$(t-1)\begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = (t+1)(t^2+1).$$

Il polinomio caratteristico $\Delta_R(t)$ ha la sola radice 1 in $\mathbb{R}$, di molteplicita' 1, dunque l'operatore R ha il solo autovalore 1 con molteplicita' algebrica

$$\mathrm{ma}(1) = 1.$$

Non essendo soddisfatta una delle condizioni che compongono l'affermazione (c'), per il teorema spettrale possiamo affermare che l'operatore lineare R non e' diagonalizzabile.

3. **Teorema spettrale; III: dimostrazione**

In questa parte mettiamo diamo una dimostrazione del Teorema spettrale.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sia $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ una base di V^n costituita da autovettori di T; avendo indicato con $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ gli autovalori di T si avra'

$$\begin{aligned} T(f_1) &= \lambda_{i_1} f_1 = \lambda_{i_1} f_1 + 0 f_2 + \cdots + 0 f_n \\ T(f_2) &= \lambda_{i_2} f_2 = 0 f_1 + \lambda_{i_2} f_2 + \cdots + 0 f_n \\ &\vdots \\ T(f_n) &= \lambda_{i_n} f_n = 0 f_1 + 0 f_2 + \cdots + \lambda_{i_n} f_n \end{aligned}$$

dove $i_1, i_2, \dots, i_n$ sono certi indici compresi fra 1 ed h; la matrice associata a T relativamente a $\mathcal{B}'$ e'

$$M_{\mathcal{B}'}(T) = ((Tf_1)_{\mathcal{B}'} \,|\, (Tf_2)_{\mathcal{B}'} \,|\, \dots \,|\, (Tf_n)_{\mathcal{B}'}) = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{i_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{i_n} \end{pmatrix},$$

una matrice diagonale.

$(a) \Rightarrow (c)$ Sia $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ una base di V^n tale che la matrice associata a T relativamente a $\mathcal{B}'$ sia diagonale:

$$M_{\mathcal{B}'}(T) = A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Nella sequenza $a_1, a_2, \dots, a_n$ compariranno certi elementi $b_1, b_2, \dots, b_h$ distinti, con rispettivi numeri di occorrenze $r_1, r_2, \dots, r_h$; per semplicita' possiamo pensare che nella sequenza $a_1, a_2, \dots, a_n$ i primi r_1 elementi siano uguali a b_1, i secondi r_2 elementi siano uguali ab_2, ... gli ultimi r_h elementi siano uguali a b_h e riscriviamo

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_1 & & & \\ & & & b_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & b_h \end{pmatrix}.$$

La matrice caratteristica di A e'

$$tI_n - A = \begin{pmatrix} t - b_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & t - b_1 & & & \\ & & & t - b_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & t - b_h \end{pmatrix}$$

e il polimnomio caratteristico di T e'

$$\Delta_T(t) = |tI_n - A| = (t-b_1)^{r_1}(t-b_2)^{r_2}\cdots(t-b_h)^{r_h}.$$

Dunque gli autovalori di T sono $b_1, b_2, \ldots, b_h$ con molteplicita' algebriche

$$\mathrm{ma}(b_1) = r_1, \quad \mathrm{ma}(b_2) = r_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{ma}(b_h) = r_h;$$

in particolare si ha

$$\sum_1^h \mathrm{ma}(b_i) = \sum_1^h r_i = n.$$

Affermiamo che gli autovalori $b_1, b_2, \ldots, b_h$ hanno molteplicita' geometriche

$$\mathrm{mg}(b_1) = r_1, \quad \mathrm{mg}(b_2) = r_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{mg}(b_h) = r_h.$$

La molteplicita' geometrica $\mathrm{mg}(b_1)$ dell'autovalore b_1 e' data dalla dimensione dell'autospazio $U_{b_1}(T)$ di T relativo a b_1, che e' costituito dai vettori $v \equiv_{\mathcal{B}} x$ tali che $Ax = b_1 I_n$, equivalentemente $(b_1 I_n - A)x = 0_n$, specificamente

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & b_1 - b_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & b_1 - b_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{r_1} \\ x^{r_1+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioe'

$$\begin{cases} (b_1 - b_2)x^{r_1+1} = 0 \\ \vdots \\ (b_1 - b_h)x^n = 0 \end{cases}, \qquad o \qquad \begin{cases} x^{r_1+1} = 0 \\ \vdots \\ x^n = 0 \end{cases};$$

le soluzioni di questo sistema sono date da

$$x^1 = p_1, \quad \ldots, \quad x^{r_1} = p_{r_1}, \quad x^{r_1+1} = \ldots = x^n 0,$$

dove i parametri $p_1, \ldots, p_{r_1}$ variano liberamente in $\mathbb{K}$, dunque

$$U_{b_1}(T) = \left\{ \sum_1^{r_1} p_i e_i;\ p_i \in \mathbb{K} \right\} = L(e_1, \ldots, e_{r_1}), \quad e \quad \dim\big(U_{b_1}(T)\big) = r_1;$$

cosi' l'autovalore b_1 ha molteplicita' geometrica $\mathrm{mg}(b_1) = r_1$. In modo analogo si prova che $\mathrm{mg}(b_2) = r_2, \ldots \mathrm{mg}(b_2) = r_h$. Infine si ha

$$\sum_1^h \mathrm{mg}(b_i) = \sum_1^h r_i = n.$$

$(c) \Rightarrow (b)$ Supponiamo che la somma delle molteplicita' geometriche degli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ di T eguagli la dimensione dello spazio:

$$\sum_1^h \mathrm{mg}(\lambda_i) = n.$$

Consideriamo una base B_1 dell'autospazio $U_{\lambda_1}(T), \ldots$, una base B_h dell'autospazio $U_{\lambda_h}(T)$, e l'insieme $B = B_1 \cup \ldots \cup B_h$ loro unione. Per le proposizioni su autovettori e indipendenza lineare si ha che l'insieme B e' linearmente indipendente; inoltre, il numero $\natural(B)$ di elementi di B e' dato da

$$\natural(B) = \sum_1^h \natural(B_i) = \sum_1^h \dim\left(U_{\lambda_i}(T)\right) = \sum_1^h \mathrm{mg}(\lambda_i) = n;$$

dunque B e' una base di V^n.