Lezione del 14 maggio.

Il riferimento principale di questa lezione e' costituito da alcune parti dei § 1 "Prodotti scalari e norme," 2 "Basi ortonormali," 5 "Matrici di Gram e proiezioni ortogonali", del Cap 8 "Spazi vettoriali euclidei".

In $\mathfrak{F}(O)$ si ha che: per ciascun vettore v e' definita (rispetto ad una prefissata unita' di misura) una lunghezza, denotata con $\|v\|$; per ogni due vettori u, v si puo' dire se sono ortogonali o meno, e in caso affermativo si scrive $u \perp v$, ed e' definito un angolo $\widehat{uv}$. Il prodotto scalare di due vettori u e v e' definito da $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \widehat{uv}$; indicato con v_u il vettore proiezione ortogonale di v sulla retta generata da u, si ha che $\langle u, v \rangle$ e' uguale alla lunghezza con segno di v_u per la lunghezza $\|u\|$ di u. Dal prodotto scalare si possono riottenere: la lunghezza di un vettore, in quanto: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$; la relazione di ortogonalita' fra due vettori, in quanto $u \perp v$ se e solo se $\langle u, v \rangle = 0$; il coseno dell'angolo fra due vettori, in quanto $\cos \widehat{uv} = \langle u, v \rangle / (\|u\| \|v\|)$. Dati tre vettori e_1, e_2, e_3 di lunghezza 1 a due a due ortogonali, cioe' tali che $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ per $i, j = 1, 2, 3$, si puo' identificare $\mathfrak{F}(O)$ con $\mathbb{R}^3$; in questa identificazione, al prodotto scalare di vettori corrisponde il prodotto scalare di terne ordinate, definito su $a = (a^1, a^2, a^3)$ e $b = (b^1, b^2, b^3)$ da $\langle a, b \rangle = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$. A partire da queste definizioni si puo' ricostruire tutta la teoria euclidea dei vettori in $\mathfrak{F}(O)$. In questa lezione e nelle due successive si mostrera' come questa teoria si estende a spazi vettoriali (finitamente generati) di dimensione qualsiasi sul campo $\mathbb{R}$ dei reali.

Per uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{R}$ si e' data la definizione di un "prodotto scalare" su V come una funzione $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare, simmetrica e definita positiva; e si e' detto "spazio vettoriale euclideo" una struttura algebrica $V = (V, \langle , \rangle)$ costituita da uno spazio vettoriale V e da un prodotto scalare $\langle , \rangle$ su V (cfr. Definizione 8.1). Si e' verificato che il prodotto scalare sopra definito sullo spazio vettoriale $\mathfrak{F}(O)$ soddisfa la defínzione generale di prodotto scalare; la corrispondente struttura si e' detta "spazio vettoriale eucliedo elementare" (cfr. appunti lezione, Esempio 8.6). Si e' verificato che il prodotto naturale sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, definito su $a = (a^i)_1^n$ e $b = (b^i)_1^n$ ponendo $\langle a, b \rangle = \sum_1^n a^i b^i$ soddisfa la definzione di prodotto scalare; la corrispondente struttura si e' detta "spazio vettoriale eucliedo $n-$dimensionale standard" (cfr. Esempio 8.1).

Per uno spazio vettoriale euclideo $V = (V, \langle , \rangle)$, si e' data la definizione di ortogonalita' fra due vettori u, v ponendo $u \perp v$ se e solo se $\langle u, v \rangle = 0$, e si sono evidenziate le prime proprieta' di questa relazione (cfr. appunti lezione, Definizione 8.3). Si e' enunciato e provato che, dato un vettore $u \neq 0$, ogni vettore v si possa scrivere in uno ed un solo modo come somma $v = v_{//} + v_\perp$ di un vettore $v_{//} \in L(u)$ e di un vettore $v_\perp \perp u$, e che

$$v_{//} = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u;$$

il vettore $v_{//}$ si e' detto "proiezione ortogonale" di v su u e si e' posto $v_{//} = pr_u(v)$; lo scalare $\langle u, v \rangle / \langle u, u \rangle$ si e' detto "coefficiente di Fourier" di v rispetto a u (cfr. appunuti lezione). Come esempio, nello spazio euclideo elementare $\mathfrak{F}(O)$ si e' considerato un cubo con un vertice in O, e si e' calcolata la proiezione ortogonale di un vettore lato sul vettore diagonale massimo. Si e' data la definizione di sottinsieme ortogonale, e si e' enunciato e provato che in V ogni sottinsieme ortogonale non contenente il vettore nullo e' linearmente indipendente (cfr. appunti lezione, Definizione 8.5, Proposizione 8.3). Si e' descritto un procedimento che prende in entrata una sequenza di vettori $v_1, \ldots, v_m$ linearmente indipendenti e restituisce iun uscita una sequenza di vettori $e_1, \ldots, e_m$ a due a due ortogonali (non nulli) tali che $L(e_1, \ldots, e_i) = L(v_1, \ldots, v_i)$ per ogni $i = 1, \ldots, m$; precisamente:

$$\begin{aligned}
e_1 &= v_1 \\
e_2 &= v_2 - pr_{e_1}(v_2) \\
e_3 &= v_3 - pr_{e_1}(v_3) - pr_{e_2}(v_3) \\
&\vdots \\
e_m &= v_m - \sum_1^{m-1} pr_{e_i}(v_m)
\end{aligned}$$

o, piu' espicitamente:

$$\begin{aligned}
e_1 &= v_1 \\
e_2 &= v_2 - \frac{\langle e_1, v_2 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 \\
e_3 &= v_3 - \frac{\langle e_1, v_3 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 - \frac{\langle e_2, v_3 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2 \\
&\vdots \\
e_m &= v_m - \sum_1^{m-1} \frac{\langle e_i, v_m \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i;
\end{aligned}$$

questo procedimento e' solitamente detto "processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt" (cfr. appunti lezione). Si e' applicato questo processo su un esempio di tre vettori nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

Per compito:

1. Nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $u = (1, 1, 1, 1)$ e $v = (1, 2, 3, 4)$.

   (a) Si determini il vettore proiezione ortogonale di v su u;

   (b) si verifichi il risultato trovato.

2. Sia V uno spazio vettoriale euclideo, sia $u \in V$ con $u \neq 0$, e sia $p_u : V \to V$ la funzione che manda ciascun vettore $v \in V$ nel vettore $p_u(v)$ proiezione ortogonale di v su u.

   (a) Si provi che la funzione p_u e' un'operatore lineare su V.

   (b) Si descrivano i sottospazi immagine $im\,(p_u)$ e nucleo $ker\,(p_u)$ di p_u.

3. Nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (1,1,1,1)$, $v_3 = (1,2,3,4)$.

   (a) se possibile, si applichi il processo di Gram-Schmidt alla sequenza v_1, v_2, v_3;

   (b) si verifichi il risultato trovato.

4. In uno spazio vettoriale euclideo V, dati due vettori non nulli $e_1, e_2 \in V$ fra loro ortogonali e un vettore $v \in V$ con $v \notin L(e_1, e_2)$, sia

$$e = v - pr_{e_1}(v) - pr_{e_2}(v) = v - \frac{\langle e_1, v\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 - \frac{\langle e_2, v\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} e_2.$$

   Si provi che:

   (a) l'insieme $\{e_1, e_2, e\}$ e' ortogonale e non contiene il vettore nullo;

   (b) $L(e_1, e_2, e) = L(e_1, e_2, v)$.