Lezione del 19 maggio.

Il riferimento principale di questa lezione e' costituito dai § 1 "Prodotti scalari e norme" e § 2 "Basi ortonormali" del Cap 8 "Spazi vettoriali euclidei", e da un punto del § 2 "L'anello delle matrici quadrate" del Cap 3 "Matrici e determinanti".

1. Sia $V = (V, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo. Per ogni vettore $v \in V$, si e' definita "lunghezza" o "norma" di v, e si e' indicata con $\|v\|$, il numero reale dato da $\sqrt{\langle v, v\rangle}$, e si e' indicata con $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ la corrispondente funzione; si e' detto "versore" un vettore di norma 1 (cfr. Definizione 8.2).

   (Per lo spazio vettoriale euclideo elementare $\mathfrak{F}(O)$, questa definizione da' l'usuale lunghezza di un vettore)

   Si sono enunciate le prime proprieta' della norma, riguardanti la sua positivita' ed annullamento, e il suo comportanmento rispetto alle operazioni di spazio vettoriale (cfr. Proposizione 8.1, proprieta' (a), (b), (c)). Si sono provate la (a) e la (b), ma non la (c). Si e' osservato che in base alla (b), ogni vettore non nullo puo' essere "normalizzato" cioe' reso un versore, dividendolo per la sua norma.

   (Per lo spazio vettoriale euclideo elementare $\mathfrak{F}(O)$, la proprieta' (c) viene a significare che " in un triangolo la lunghezza di un lato non supera la somma delle lunghezze degli altri due ")

   A partire dallo sviluppo del quadrato scalare di un binomio, si e' ricavato che per ogni $u, v \in V$ con $u \perp v$, si ha

   $$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

   (cfr. appunti lezione, Proposizione 8.1 proprieta' (e), Proposizione 8.2).

   (Per lo spazio vettoriale euclideo elementare $\mathfrak{F}(O)$, questa proposizione e' il Teorema di Pitagora (cfr. Osservazione 8.2))

   Si e' enunciata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: per ogni $u, v \in V$ si ha

   $$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

   Si e' indicato come questa disuguaglianza si possa ricavare dalla formula $pr_u(v) = (\langle u, v\rangle / \langle u, u\rangle)\, u$ per la proiezione ortogonale di v su u e dal teorema di Pitagora, che fornisce la disuguaglianza $\|pr_u(v)\| \leq \|v\|$. Si e' mostrato come la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz permetta di definire il coseno dell'angolo fra due vettori, e la misura dell'angolo convesso fra due vettori

(cfr. Definizione 8.4, Osservazione 8.3). Si e' osservato che l'angolo convesso fra due vettori risulta essere acuto, retto o ottuso secondo che il prodotto scalare dei due vettori sia positivo, nullo o negativo.

Per lo spazio vettoriale euclideo $n-$dimensionale standard $\mathbb{R}^n$, si e' ricordata la definizione del prodotto scalare e si sono esplicitate le definizioni di sopra:

$$\langle a, b\rangle = \sum_1^n a^i b^i, \qquad \|a\| = \sqrt{\sum_1^n (a^i)^2},$$
$$cos(\widehat{ab}) = \frac{\sum_1^n a^i b^i}{\sqrt{\sum_1^n (a^i)^2}\sqrt{\sum_1^n (b^i)^2}}$$

per ogni $a = (a^i)_1^n$, $b = (b^i)_1^n$ in $\mathbb{R}^n$ (cfr. Esempio 8.1). Si e' osservato che

$$\langle a, b\rangle =^t ab,$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}^n$, dove al secondo membro a e b sono identificate con matrici colonna (cfr. appunti lezione).

Si sono considerati due vettori nello spazio vettoriale euclideo $4-$dimensionale standard $\mathbb{R}^4$, e se ne e' data una rappresentazione nel piano che conserva lunghezze ed angoli (cfr. appunti lezione).

2. Sia $V = (V, \langle,\rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo. Si e' definita "base ortogonale" di V ogni base di V i cui vettori sono a due a due ortogonali, e si e' definita "base ortonormale" di V ogni base di V i cui vettori sono versori a due a due ortogonali (cfr. Definizione 8.6). Si e' osservato che, se $V = V^n$ e' uno spazio vettoriale euclideo $n-$dimensionale, allora un sottinsieme $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ e' una base ortonormale di V^n se e solo se

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases}.$$

Si e' enunciato e dimostrato che, se $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ e' una base ortonormale di uno spazio vettoriale $n-$dimensionale V^n, allora le coordinate $u^1, \dots, u^n$ di un vettore $u \in V$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono i prodotti scalari $\langle e_1, u\rangle, \dots, \langle e_n, u\rangle$, in altri termini che

$$u = \sum_1^n \langle e_i, u\rangle e_i$$

(cfr. Proposizione 8.6 (a)).

Si e' enunciato e provato che ogni spazio vettoriale euclideo (finitamente generato) possiede una base ortonormale (cfr. Proposizione 8.5).

(Nello spazio vettoriale euclideo elementare $\mathfrak{F}(O)$, le basi ordinate ortonormali si ottengono scegliendo un versore e_1 con estremo libero sulla sfera di centro O e raggio 1, poi scegliendo un versore e_2 con estremo libero sulla circonferenza di centro O e raggio 1 ortogonale a e_1, infine scegliendo un versore e_3 fra i due versori con estremo libero sulla retta per O ortogonale a e_1 ed e_2.)

Si e' enunciato e dimostrato che, se $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ e' una base ortonormale di uno spazio vettoriale $n-$dimensionale V^n, allora per ogni $u \equiv_{\mathcal{B}} (u^i)_1^n$ e $v \equiv_{\mathcal{B}} (v^i)_1^n$ si ha

$$\langle u, v \rangle = \sum_1^n u^i v^i$$

(cfr. Proposizione 8.6 (b)). Si e' osservato che ciascuna base ortonormale $\mathcal{B}$ di V^n permette di identificare lo spazio vettoriale euclideo $n-$dimensionale V^n con lo spazio vettoriale euclideo $n-$dimensionale standard $\mathbb{R}^n$, nel senso che l'isomorfismo di spazi vettoriali

$$\Phi_{\mathcal{B}} : V^n \to \mathbb{R}^n, \qquad v \mapsto (v)_{\mathcal{B}}$$

associato alla base $\mathcal{B}$ di V^n e' compatibile con la struttura educlidea di V^n e con la struttura euclidea standard su $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \Phi_{\mathcal{B}}(u), \Phi_{\mathcal{B}}(v) \rangle = \langle u, v \rangle;$$

si dice che gli spazi vettoriali euclidei V^n e $\mathbb{R}^n$ sono "isomorfi" (cfr. appunti lezione).

Per lo spazio vettoriale euclideo $n-$dimensionale standard $\mathbb{R}^n$, si e' osservato che una $n-$pla $(a_1, \ldots, a_n)$ di vettori $a_i \in \mathbb{R}^n$ e' una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ sse

$${}^t a_i a_j = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases},$$

che queste n^2 relazioni fra scalari si possono esprimere nell'unica relazione matriciale

$${}^t\left(\; a_1 \; \middle| \; \ldots \; \middle| \; a_n \; \right) \left(\; a_1 \; \middle| \; \ldots \; \middle| \; a_n \; \right) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

che, indicata con $A = \left(\; a_1 \; \middle| \; \ldots \; \middle| \; a_n \; \right)$ la matrice quadrata di ordine n che ha per colonne i vettori a_i, questa relazione si puo' scrivere

$${}^t A A = I_n;$$

si prova che questa relazione e' equivalente alla relazione $A \, {}^t A = I_n$.

Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si dice "matrice ortogonale" se soddisfa la condizione

$$^{t}AA = I_n = A\ ^{t}A$$

(cfr. Definizione 3.11). Possiamo dunque dire che una $n-$pla $(a_1, \ldots, a_n)$ di $a_i \in \mathbb{R}^n$ e' una base ordinata ortonormale di $\mathbb{R}^n$ se e solo se la matrice $A = \left(\ a_1 \ \middle| \ \ldots \ \middle| \ a_n \ \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e' ortogonale.