Lezione del 21 maggio.

Il riferimento principale di questa lezione e' costituito da parti di: § 3 "Trasformazioni ortogonali", § 4 "Complemento ortogonale", § 5 "Matrici di Gram e proiezioni ortogonali", § 6 "Orientazione di uno spazio vettoriale euclideo" del Cap. 8 "Spazi vettoriali euclidei"; § 2 "L'anello delle matrici quadrate", § 6 "Calcolo del determinante" del Cap. 3 "Matrici e determinanti".

1. **Trasformazioni ortogonali**

   Siano V, W due spazi vettoriali euclidei. Una trasformazione lineare $T : V \to W$ si dice "trasformazione ortogonale" se conserva i prodotti scalari, e dunque anche norme e angoli, cioe' per ogni $u, v \in V$ si ha

   $$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle,$$

   e dunque $\|T(v)\| = \|v\|$ e $\widehat{T(u)T(v)} = \widehat{uv}$; in particolare, si ha che una trasformazione ortogonale si annulla solo sul vettore nullo, e dunque e' iniettiva (cfr. Definizione 8.7).

   > Fra le trasformazioni lineari $T : \mathfrak{F}_2(O) \to \mathfrak{F}_2(O)$ del piano vettoriale euclideo in se', esempi di trasformazioni ortogonali sono le rotazioni attorno ad O e le simmetrie rispetto a rette per O, mentre non sono trasformazioni ortogonali le proiezioni ortogonali su rette per O; fra le trasformazioni lineari $T : \mathfrak{F}_1(O) \to \mathfrak{F}_2(O)$ dalla retta vettoriale euclidea al piano vettoriale euclideo che hanno per immagine una data retta passante per O, ci sono esattamente due trasformazioni ortogonali; non esistono trasformazioni ortogonali $T : \mathfrak{F}_2(O) \to \mathfrak{F}_1(O)$ (cfr. appunti lezione).

   Supponiamo che $V = V^n$ abbia dimensione n. Data una base ordinata ortogonale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ di V, e una sequenza $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ di vettori di W, sia $T : V \to W$ la trasformazione lineare tale che $T(e_i) = f_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$; se T e' una trasformazione ortogonale, allora si ha che $\mathcal{C}$ e' un sottinsieme ortonormale di W; viceversa, se $\mathcal{C}$ e' un sottinsieme ortonormale di W, allora T e' una trasformazione ortogonale ; riassumendo: fissata in V^n una base ortonormale, dare una trasformazione ortogonale $V^n \to W$ equivale a dare una sequenza di n vettori ortonormale in W (cfr. appunti lezione).

   > Fissata nel piano vettoriale euclideo $\mathfrak{F}_2(O)$ una base ordinata ortonormale (e_1, e_2), si ha che dare una trasformazione ortogonale $T : \mathfrak{F}_2(O) \to \mathfrak{F}_2(O)$ equivale a dare una base ordinata ortonormale (f_1, f_2) di versori f_i in $\mathfrak{F}_2(O)$; si puo' prendere come f_1 un versore qualsiasi, e per ogni f_1 fissato si puo' prendere come f_2 uno dei due versori ortogonali a f_1; a una scelta di f_2 corrisponde una rotazione attorno ad O,

all'altra scelta corrisponde una una rotazione attorno ad O seguita da una simmetria rispetto ad una retta per O (cfr. appunti lezione).

Sia $T : V^n \to W^n$ una trasformazione lineare fra i due spazi vettoriali euclidei V^n e W^n della stessa dimensione n; date una base ordinata ortogonale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ di V^n, e una base ordinata ortogonale $\mathcal{B}'$ di W^n, sia

$$M = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T) = \left(\ (Te_1)_{\mathcal{B}'} \ \middle| \dots \middle| \ (Te_n)_{\mathcal{B}'} \ \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

la matrice che rappresenta T rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Per quanto visto in precedenza, le seguenti affermazioni sono equivalenti: (1) la trasformazione lineare T e' una trasformazione ortogonale; (2) i vettori $Te_1, \dots, Te_n$ formano una base ortonormale di W^n; (3) i vettori $(Te_1)_{\mathcal{B}'}, \dots, (Te_n)_{\mathcal{B}'}$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$; (4) vale la relazione ${}^tM\, M = I_n$, che a sua volta implica la relazione $M\, {}^tM = I_n$. Si ha dunque che T e' una trasformazione ortogonale se e solo se la matrice $M = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$ e' una matrice ortogonale (cfr. appunti lezione, Proposizione 8.9).

Approfondimento sulle matrici ortogonali. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che ${}^tAA = I_n$; questa relazione si puo' leggere dicendo che A e' invertibile a sinistra e che la trasposta ${}^tA$ di A e' un'inversa sinistra di A; applicando ad entrambe i membri il determinante e ricordando il teorema di Binet e l'invarianza del determiante per trasposizione, si ha $\det(A)^2 = 1$, da cui $\det(A) = \pm 1$, in particolare, $\det(A) \neq 0$; dunque A e' invertibile, e la trasposta ${}^tA$ di A e' l'inversa bilatera di A :

$$ {}^tA\ A = I_n = A\ {}^tA.$$

Le matrici ortogonali di ordine n ad elementi in $\mathbb{R}$ formano un gruppo rispetto al prodotto di matrici, che viene detto "gruppo ortogonale" di ordine n, e viene indicato con $O_n(\mathbb{R})$; fra queste matrici, quelle aventi determinante uno vengono dette "matrici ortogonali proprie" e formano a loro volta un gruppo, che viene detto "gruppo speciale ortogonale" di ordine n, e viene indicato con $SO_n(\mathbb{R})$. (cfr. appunti lezione, definizione 3.11, Proposizione 3.8, Proposizione 3.20).

Si e' ricavato che le matrici ortogonali di ordine 2 sono dei due tipi

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \qquad con \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} : \ a_1^2 + a_2^2 = 1,$$

equivalentemente

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad con \quad \vartheta \in \mathbb{R};$$

qui sopra le matrici ortogonali proprie sono quelle che compaiono a sinistra (cfr. appuunti lezione, Esempio 3.2).

Alle matrici ortogonali di ordine 2 corrispondono gli operatori ortogonali sul piano vettoriale euclideo $\mathfrak{F}_2(O)$; alle matrici ortogonali proprie corrispondono le rotazioni attorno ad O, e alle altre matrici ortogonali corrispondono le le composizioni di una rotazione attorno ad O e di una simmetria rispetto ad una retta per O (cfr. appunti lezione; per un approfondimento, cfr. § 6 ″orientazione di uno spazio vettoriale euclideo″).

2. **Complementi ortogonali e proiezioni ortogonali**

Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Due sottinsiemi $X, Y \subseteq V$ si dicono ortogonali, e si scrive $X \perp Y$, se ogni $x \in X$ e' ortogonale ad ogni $y \in Y$; se $X \perp Y$, si ha $X \cap Y = \{0\}$ oppure $\emptyset$. La relazione di ortogonalita' fra sottinsiemi si comporta bene rispetto all'operazione di chiusura lineare di sottinsiemi; per ogni $X, Y \subseteq V$ si ha che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

$$X \perp Y; \qquad L(X) \perp Y; \qquad X \perp L(Y); \qquad L(X) \perp L(Y)$$

(cfr. appunti lezione).

Nello spazio vettoriale euclideo $\mathfrak{F}_3(O)$, per $X = \{a_1, a_2\}$ e $y = \{b\}$ con a_1, a_2, b vettori non nulli, la proposizione di sopra viene a significare che le seguenti affermazioni sono equivalenti: i vettori a_1 e a_2 sono ortogonali al vettore b; tutti i vettori sul piano generato da a_1 e a_2 sono ortogonali al vettore b; ... (cfr. appunti lezione).

Per ciascun sottinsieme $X \subseteq V$, l'insieme dei vettori di V ortogonali a ciascun vettore di X viene detto ″complemento ortogonale″ di X e viene indicato con ${}^{\perp}X$. Dalla definizione segue direttamente che ${}^{\perp}\{0\} = V$, e ${}^{\perp}V = \{0\}$, e che per ogni $X_1, X_2 \subseteq V$ con $X_1 \subseteq X_2$ si ha ${}^{\perp}X_1 \supseteq {}^{\perp}X_2$ (cfr. Definizione 8.8). Dalle proprieta' della relazione di ortogonalita' rispetto all'operazione di chiusura lineare segue che per ogni $X \subseteq V$ si ha: ${}^{\perp}X$ e' un sottospazio di V; ${}^{\perp}L(X) = {}^{\perp}X$ (cfr. Proposizione 8.10, (a), (b)).

Sia $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortogonale di V; per ciascun sottinsieme $X \subseteq B$ e' facile determinare il complemento ortogonale ${}^{\perp}X$; consideriamo per semplicita' un sottinsieme del tipo $\{e_1, \dots, e_h\}$; scritto il generico vettore $v \in V$ nella forma $v = \sum_1^n \langle e_i, v \rangle e_i$, si ha che $v \perp \{e_1, \dots, e_h\}$ se e solo se $\langle e_1, v \rangle = \cdots = \langle e_h, v \rangle = 0$, cioe' se e solo se $v = \sum_{h+1}^n \langle e_i, v \rangle e_i$, cioe' sse $v \in L(e_{h+1}, \dots, e_n)$. In generale per ogni $X \subseteq B$ si ha

$${}^{\perp}X = L({}^{c}X), \qquad o \qquad {}^{\perp}L(X) = L({}^{c}X),$$

dove ${}^{c}X$ e' il sottinsieme complementare di X in B. (cfr. appunti lezione).

Con considerazioni simili si puo' provare il seguente Teorema: per ogni sottospazio U di V si ha

$$V = U \oplus {}^{\perp}U$$

(cfr. Teorema 8.11 (b)). Per questo teorema, ogni vettore $v \in V$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$v = v_{//} + v_{\perp}, \qquad con \quad v_{//} \in U, \quad v_{\perp} \in^{\perp} U.$$

E' dunque ben definita l'applicazione

$$pr_U : V \to V, \qquad pr_U(v) = v_{//};$$

questa applicazione e' un operatore lineare du V, detto "proiezione ortogonale" sul sottospazio U (cfr. appunti lezione, Definizione 8.11)

Un metodo per determinare la proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio e' dato dalla seguente proposizione: se U e' un sottospazio dello spazio vettoriale V e $\{f_1, \dots, f_h\}$ e' una base ortogonale di U, allora per ogni vettore $v \in V$ si ha

$$pr_U(v) = \sum_1^h pr_{f_i}(v) = \sum_1^h \frac{\langle f_i, v \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} f_i$$

(cfr. appunti lezione).

> Si e' considerato lo spazio vettoriale euclideo $\mathfrak{F}_3(O)$, con una base ordinata ortonormale $B = (e_1, e_2, e_3)$ e si sono usati il processo di Gram-Schmidt e questa proposizone per determinare la proiezione ortogonale del generico vettore v di $\mathfrak{F}_3(O)$ sul sottospazio $L(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ (cfr. appunti lezione).

Per compito:

1. Sia V^3 uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ una sua base ordinata ortonormale, e siano T_1, T_2, T_3, T_4 gli operatori lineari su V^3 rappresentati relativamente a $\mathcal{B}$ rispettivamente dalle matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Per ciascun operatore, stabilire se e' un operatore ortogonale; per ciascun operatore ortogonale, stabilire se e' diagonalizzabile e in tal caso scrivere una matrice diagonale che lo rappresenta.

2. Nello spazio vettoriale euclideo $4-$dimensionale standard $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $a_1 = (1, 0, 0, -1)$, $a_2 = (0, 1, 0, -1)$, $a_3 = (0, 0, 1, -1)$. Per ciascuno sottospazio $U_1 = L(a_1)$, $U_2 = L(a_1, a_2)$, $U_3 = L(a_1, a_2, a_3)$, si determini una base e la dimensione del rispettivo complemento ortogonale ${}^{\perp}U_1$, ${}^{\perp}U_2$, ${}^{\perp}U_3$.

3. Sia V^3 uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ una sua base ordinata ortonormale; siano $a = e_1 + e_2 + e_3$, $b = e_2 + e_3 + e_4$ vettori in V^3, e sia $U = L(a, b)$ il sottospazio da essi generato. Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ sul sottospazio U, e si verifichi il risultato trovato.