Lezione del 28 maggio.

Il riferimento principale di questa lezione e' costituito da parti di: § 1 "Matrici simmetriche", § 2 "Forme bilineari, quadratiche e matrici simmetriche associate", § 3 "Congruenza di matrici simmetriche" della Appendice B "Forme bilineari e quadratiche". La struttura del discorso sviluppato a lezione, cioe' l'insieme degli argomenti presentati, l'ordine nel quale sono presentati, e le relazioni evidenziate fra di essi, e' un po' diversa dalla struttura del discorso sviluppato nel testo.

1. **Matrici simmetriche**

   Una matrice quadrata simmetrica rispetto alla diagonale si dice "matrice simmetrica"; esplicitamente, le matrici simmetriche sono le matrici del tipo
$$(a), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \qquad \dots;$$
   sinteticamente, una matrice $A = (a^i_j)$ quadrata di ordine n e' simmetrica se e solo se $a^i_j = a^j_i$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$, in breve se e solo se ${}^tA = A$. L'insieme delle matrici simmetriche di ordine n ad elementi in un campo $\mathbb{K}$ viene indicato con $S_n(\mathbb{K})$.

2. **Operatori autoaggiunti**

   Sia V^n uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n.

   Definizione Un operatore lineare $T : V^n \to V^n$ si dice "autoaggiunto" se e solo se
$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle, \qquad \forall u, v \in V^n.$$
   Una descrizione esplicita degli operatori autoaggiunti e' data dalla seguente

   Proposizione Un operatore lineare T su V^n e' autoaggiunto se e solo se per ogni base ordinata ortonormale $\mathcal{B}$ di V^n la matrice $M_\mathcal{B}(T)$ e' simmetrica.

   Dimostrazione. Essendo $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V^n, per ogni $a, b \in V^n$ si ha $\langle a, b\rangle = {}^t(a)_\mathcal{B}\, (b)_\mathcal{B}$, dunque per ogni $u, v \in V^n$ si ha
$$\begin{aligned} \langle T(u), v\rangle &= {}^t(T(u))_\mathcal{B}\ (v)_\mathcal{B} = {}^t(M_\mathcal{B}(T)\ (u)_\mathcal{B})\ (v)_\mathcal{B} = {}^t(u)_\mathcal{B}\ {}^tM_\mathcal{B}(T)\ (v)_\mathcal{B} \\ \langle u, T(v)\rangle &= {}^t(u)_\mathcal{B}\ (T(v))_\mathcal{B} = {}^t(u)_\mathcal{B}\ M_\mathcal{B}(T)\ (v)_\mathcal{B}. \end{aligned}$$
   L'operatore lineare T e' autoaggiunto se e solo se per ogni $u, v \in V^n$ si ha $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$; cio' vale se e solo se per ogni $u, v \in V^n$ si ha
$${}^t(u)_\mathcal{B}\ {}^tM_\mathcal{B}(T)\ (v)_\mathcal{B} \ = \ {}^t(u)_\mathcal{B}\ M_\mathcal{B}(T)\ (v)_\mathcal{B},$$
   e cio' vale se e solo se ${}^tM_\mathcal{B}(T) \ = \ M_\mathcal{B}(T)$.

   Per questa proposizione si possono costruire gli operatori autoaggiunti su V^n a partire dalle matrici simmetriche di ordine n.

Esempio. Sia V^2 uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 2, e sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ una base ortonormale di V^2. Per ciascuna matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

simmetrica di ordine 2 su $\mathbb{R}$ l'operatore lineare T su V^2 tale che $A = M_{\mathcal{B}}(T)$ cioe' tale che

$$\begin{aligned} T(e_1) &= ae_1 + be_2 \\ T(e_2) &= be_1 + ce_2 \end{aligned}$$

e' autoaggiunto, e in questo modo si ottengono tutti gli operatori lineari autoaggiunti su V^2.

Gli operatori autoaggiunti sono speciali, come mostrato dalle seguenti proposizioni.

Proposizione Sia T un operatore lineare autoaggiunto su V^n; allora due qualsiasi autovettori u, v di T relativi a due autovalori distinti λ, μ di T sono fra loro ortogonali.

Dimostrazione. Si ha $T(u) = \lambda u$ e $T(v) = \mu v$, dunque

$$\begin{aligned} \langle T(u), v\rangle &= \langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle, \\ \langle u, T(v)\rangle &= \langle u, \mu v\rangle = \mu\langle u, v\rangle; \end{aligned}$$

d'altro canto e' $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$; dunque si ha $\lambda\langle u, v\rangle = \mu\langle u, v\rangle$, e cio', essendo $\lambda \neq \mu$, implica $\langle u, v\rangle = 0$.

Nel seguito, data una matrice quadrata di ordine n, diremo che un numero reale λ e' un "autovalore di molteplicita' m di A" se λ e' una radice di molteplicita' m del polinomio caratteristico di A.

Proposizione Sia $A \in S_n(\mathbb{R})$; allora il polinomio caratteristico $\Delta_A(t)$ di A si fattorizza completamente su $\mathbb{R}$, cioe'

$$\Delta_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_h)^{m_h}, \qquad (n = m_1 + \ldots + m_h),$$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_h \in \mathbb{R}$.

Non diamo la dimostrazione di questa proposizione, ma solo una verifica nel caso $n = 2$. In questo caso la matrice A e' del tipo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$; la matrice caratteristica di A e'

$$tI_2 - A = \begin{pmatrix} t - a & -b \\ -b & t - c \end{pmatrix},$$

ed il polinomio caratteristico di A e' il trinomio di II grado

$$\Delta_A(t) = \det(tI - A) = t^2 - (a+c)t + ac - b^2.$$

Il discriminante di questo trinomio e' $\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2$, questo e' ≥ 0 per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$, e dunque il trinomio ha sempre due radici reali (distinte o coincidenti).

La principale proprieta' delle matrici simmetriche e degli operatori autoaggiunti e' data dal seguente

Teorema Siano

- $A \in S_n(\mathbb{R})$;
- $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V^n;
- T l'operatore lineare autoaggiunto su V^n tale che $M_{\mathcal{B}}(T) = A$.

Allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B}'$ di V^n tale che $M_{\mathcal{B}'}(T)$ sia diagonale; inoltre, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ sono gli autovalori distinti di A e $m_1, \ldots, m_h$ sono le rispettive molteplicita', allora

$$M_{\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_h & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & \lambda_h \end{pmatrix} \qquad (\textit{ciascun } \lambda_i \textit{ compare i volte}),$$

a meno di una permutazione degli elementi diagonali (cfr. Teorema B.1).

Non diamo la dimostrazione di questo teorema. Questo teorema viene detto spesso "teorema spettrale per le matrici reali simmetriche." Di regola, data una matrice simmetrica A di ordine n e un associato operatore autoaggiunto T su V^n, interessa prima di tutto la matrice diagonale (essenzialmente unica) che rappresenta T, in quanto in essa si rivela la struttura geometrica semplice dell'operatore; si noti che per determinare questa matrice diagonale serve solo determinare gli autovalori di T e le loro molteplicita', cioe' serve solo fattorizzare completamente il polinomio caratteristico di A; se poi interessa, una base ortonormale $\mathcal{B}'$ di V^n rispetto alla quale l'operatote T e' rappresentato da tale matrice diagonale puo' essere determinata nel modo seguente: (1) per ogni autospazio si determina eventualmente usando il processo di Gram-Schmidt un insieme base ortonormale; (2) si considera l'insieme unione di questi insiemi, che essendo gli autospazi di T a due a due ortogonali e' ancora un insieme ortonormale; (3) infine si ordinano opportunamente i vettori di questo insieme.

Esempio. Sia V^3 uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ una sua base ortonormale, sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

e sia T l'operatore autoaggiunto su V^3 tale che $M_{\mathcal{B}}(T) = A$, cioe' l'operatore dato da

$$T(x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) =$$
$$(x^1 + 2x^2 + 3x^3)e_1 + (2x^1 + 4x^2 + 6x^3)e_2 + (3x^1 + 6x^2 + 9x^3)e_3.$$

Il polinomio caratteristico di A e'

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -3 \\ -2 & t-4 & -6 \\ -3 & -6 & t-9 \end{vmatrix} = \ldots = t^3 - 14t^2 = t^2(t-14),$$

e dunque gli autovalori di A sono 0 e 14 con molteplicita' rispettive 2 e 1. Per il terorema spettrale, esiste una base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ di V^3 tale che la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}'$ sia

$$M_{\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix},$$

e dunque tale che T sia dato da

$$T(y^1 f_1 + y^2 f_2 + y^3 f_3) = 14 y^3 f_3.$$

3. **Forme bilineari simmetriche**

Sia V^n uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n.

Definizione Un'applicazione $\phi : V^n \times V^n \to \mathbb{R}$ si dice "forma bilineare" su V^n se

$$\begin{aligned} \phi(u+w, v) &= \phi(u,v) + \phi(w,v) \\ \phi(u, v+w) &= \phi(u,v) + \phi(u,w) \\ \phi(\alpha u, w) &= \alpha\phi(u,v) = \phi(u, \alpha v) \end{aligned}$$

per ogni $u, v, w \in V^n$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (cfr. Definizione B.1).

Sia ϕ una forma bilineare su V^n, e sia $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base di V^n, allora

$$\begin{aligned} \phi(\sum_{i=1}^n x^i e_i, \sum_{j=1}^n y^j e_j) &= \sum_{i,j=1}^n \phi(x^i e_i, y^j e_j) = \sum_{i,j=1}^n x^i y^j \phi(e_i, e_j) \\ &= \begin{pmatrix} x^1 & \ldots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(e_1,e_1) & \ldots & \phi(e_1,e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi(e_n,e_1) & \ldots & \phi(e_n,e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

dunque la forma ϕ e' univocamente determinata dai valori $\phi(e_i, e_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$; la tabella di questi valori viene detta "matrice associata alla forma ϕ relativa alla base $\mathcal{B}$" e viene indicata con $Q_{\mathcal{B}}(\phi)$, dunque per ogni $u, v \in V^n$ si ha

$$\phi(u, v) \;=\; {}^t(u)_{\mathcal{B}}\; Q_{\mathcal{B}}(\phi)\; (v)_{\mathcal{B}}.$$

Definizione Una forma bilineare $\phi : V^n \times V^n \to \mathbb{R}$ su V^n si dice "simmetrica" se

$$\phi(u, v) = \phi(v, u) \qquad \forall u, v \in V^n.$$

Proposizione Una forma bilineare $\phi : V^n \times V^n \to \mathbb{R}$ su V^n e' simmetrica se e solo se per ogni base ordinata $\mathcal{B}$ di V^n la matrice $Q_{\mathcal{B}}(\phi)$ e' simmetrica.

> Esempio. Sia V^2 uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 2, e sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ una base di V^2. Per ciascuna matrice
>
> $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$
>
> simmetrica di ordine 2 su $\mathbb{R}$ la forma bilineare $\phi : V^2 \times V^2 \to \mathbb{R}$ su V^2 tale che $A = Q_{\mathcal{B}}(\phi)$ e' simmetrica, e in questo modo si ottengono tutte le forme bilineari simmetriche su V^2. Si ha
>
> $$\begin{aligned}\phi(x^1e_1 + x^2e_2, y^1e_1 + y^2e_2) &= \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \\ &= ax^1y^1 + b(x^1y^2 + x^2y^1) + cx^2y^2.\end{aligned}$$

Teorema Siano

- $A \in S_n(\mathbb{R})$;
- $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V^n;
- ϕ la forma bilineare simmetrica su V^n tale che $Q_{\mathcal{B}}(\phi) = A$.

Allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B}'$ di V^n tale che $Q_{\mathcal{B}'}(\phi)$ sia diagonale; inoltre, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ sono gli autovalori distinti di A e $m_1, \ldots, m_h$ sono le rispettive molteplicita', allora

$$Q_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_h & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & \lambda_h \end{pmatrix} \qquad (\textit{ciascun } \lambda_i \textit{ compare } i \textit{ volte}),$$

a meno di una permutazione degli elementi diagonali.

Di regola, data una matrice simmetrica A di ordine n e una associata forma bilineare simmetrica ϕ su V^n, interessa prima di tutto la matrice diagonale (essenzialmente unica) che rappresenta ϕ, in quanto in essa si rivela la struttura geometrica semplice della forma bilineare simmetrica.

Esempio. Sia V^3 uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ una sua base ortonormale, sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

e sia ϕ la forma bilineare simmetrica su V^3 tale che $Q_{\mathcal{B}}(\phi) = A$, cioe' la forma data da

$$\phi(x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3, y^1e_1 + y^2e_2 + y^3e_3) =$$
$$x^1y^1 + 2(x^1y^2 + x^2y^1) + 3(x^1y^3 + x^3y^1) + 4x^2y^2 + 6(x^2y^3 + x^3y^2) + 9x^3y^3.$$

Il polinomio caratteristico di A e'

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -3 \\ -2 & t-4 & -6 \\ -3 & -6 & t-9 \end{vmatrix} = \ldots = t^3 - 14t^2 = t^2(t-14),$$

e dunque gli autovalori di A sono 0 e 14 con molteplicita' rispettive 2 e 1. Per il teorema di sopra, esiste una base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ di V^3 tale che la matrice associata a ϕ rispetto a $\mathcal{B}'$ sia

$$Q_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix},$$

e dunque tale che ϕ sia data da

$$T(z^1f_1 + z^2f_2 + z^3f_3, t^1f_1 + t^2f_2 + t^3f_3) = 14z^3t^3.$$