Lezione del 4 giugno.

Il riferimento principale di questa lezione e' costituito da parti di: § 2 "Forme bilineari, quadratiche e matrici simmetriche associate", § 3 "Congruenza di matrici simmetriche", § 5 "Forme e matrici definite" della Appendice B "Forme bilineari e quadratiche". La struttura del discorso sviluppato a lezione e' un po' diversa dalla struttura del discorso sviluppato nel testo. La lezione e' composta di due parti: (1) relazioni di similitudine (ortogonale) e congruenza (ortogonale) sulle matrici; (2) forme quadratiche, teorema spettrale e applicazioni. Nel seguito V^n indichera' uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n.

Similitudine (ortogonale) e congruenza (ortogonale) di matrici.

1. **Similitudine di matrici**

   Riprendiamo a sviluppiamo alcuni argomenti presentati in precedenza (cfr. registro lezione 23).

   Proposizione Sia $T : V^n \to V^n$ un operatore lineare su V^n. Le matrici $M_{\mathcal{B}}(T)$ e $M_{\mathcal{B}'}(T)$ associate a T relativamente a due basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V^n sono legate dalla relazione

   $$M_{\mathcal{B}'}(T) \;=\; M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^{-1}\, M_{\mathcal{B}}(T)\, M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.$$

   Questa proposizione suggerisce la seguente definizione

   Definizione Si dice che due matrici A e A' in $M_n(\mathbb{R})$ sono "simili", e si scrive $A \sim_s A'$ se esiste una matrice invertibile $E \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che

   $$A' = E^{-1}AE.$$

   In base a questa definizione, si ha che matrici associate ad uno stesso operatore sono simili; si prova che vale anche il viceversa. Precisamente si ha la:

   Proposizione Due matrici A e A' in $M_n(\mathbb{R})$ sono simili se e solo se esiste un operatore lineare T su V^n ed esistono due basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V^n tali che

   $$A = M_{\mathcal{B}}(T), \quad e \quad A' = M_{\mathcal{B}'}(T).$$

   La relazione di similitudine e' una relazione di equivalenza sull'insieme $M_n(\mathbb{R})$ e come tale suddivide l'insieme $M_n(\mathbb{R})$ in classi di equivalenza; informalmente si puo' dire che queste classi di equivalenza descrivono la struttura geometrica dei vari operatori su V^n. Le principali caratteristiche di una matrice sono invarianti per similitudine, precisamente si ha la

Proposizione Siano A e A' in $M_n(\mathbb{R})$; se $A \sim_s A'$ allora A e A' hanno

$$\begin{aligned} \textit{lo stesso rango}: &\quad \rho(A) = \rho(A') \\ \textit{lo stesso determinante}: &\quad \det(A) = \det(A') \\ \textit{lo stesso polinomio caratteristico}: &\quad \Delta_A(t) = \Delta_{A'}(t). \end{aligned}$$

Il fatto che due matrici simili abbiano lo stesso polinomio caratteristico implica che abbiano lo stesso determinante, in quanto il polinomio caratteristico di una matrice ha per termine costante il determinate della matrice.

Non e' detto che matrici con lo stesso polinomio caratteristico siano simili.

Esempio. Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso polinomio caratteristico $\Delta_A(t) = \Delta_{A'}(t) = t^2$, ma hanno ranghi $\rho(A) = 1$ e $\rho(A) = 0$ diversi, dunque non sono simili. Analogamente, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno tutte e tre lo stesso polinomio caratteristico, ma a due a due hanno ranghi diversi, dunque sono a due a due non simili.

2. **Ortogonale similitudine di matrici**

La matrice associata ad un operatore autoaggiunto rispetto ad una base ortonormale e' simmetrica; la considerazione delle matrici simmetriche associate ad uno stesso operatore autoaggiunto rispetto alle varie basi ortonormali suggerisce la seguente

Definizione Si dice che due matrici simmetriche A e A' in $S_n(\mathbb{R})$ sono "ortogonalmente simili" e si scrive $A \sim_{os} A'$ se esiste una matrice ortogonale $E \in O_n(\mathbb{R})$ tale che

$$A' = E^{-1}AE.$$

In base a questa definizione, si ha che matrici simmetriche associate ad uno stesso operatore autoaggiunto rispetto a basi ortonormali sono ortogonalmente simili; si prova che vale anche il viceversa. Precisamente si ha la

Proposizione Due matrici simmetriche A e A' in $S_n(\mathbb{R})$ sono ortogonalmente simili se e solo se esiste un operatore lineare autoaggiunto T su V^n ed esistono due basi ordinate ortonormali $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V^n tali che

$$A = M_{\mathcal{B}}(T), \quad e \quad A' = M_{\mathcal{B}'}(T).$$

La relazione di ortogonale similitudine e' una relazione di equivalenza sull' insieme $S_n(\mathbb{R})$ e come tale suddivide l'insieme $S_n(\mathbb{R})$ in classi di equivalenza; informalmente si puo' dire che queste classi di equivalenza descrivono la struttura geometrica euclidea dei vari operatori su V^n.

Matrici ortogonalmente simili sono in particolare matrici simili.

Il teorema spettrale per gli operatori lineari autoaggiunti e' equivalente al seguente

Teorema Sia $A \in S_n(\mathbb{R})$, e sia D una matrice diagonale avente elementi diagonali gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di A (scritti in un qualsiasi ordine, ciascuno elencato tante volte quant'e' la sua molteplicita'). Allora A e' ortogonalmente simile a D.

Da questo teorema segue il

Teorema Siano $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$. Le seguenti affermazioni sono a due a due equivalenti: (1) A e A' sono ortogonalmente simili; (2) A e A' sono simili; (3) A e A' hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Idea della dimostrazione: si ha direttamente che la (1) implica la (2) e che la (2) implica la (3); si puo' provare che la (3) implica la (1) osservando che se A e A' hanno lo stesso polinomio caratteristico, allora per il teorema spettrale A e A' sono ortogonalmente simili ad una stessa matrice diagonale, e dunque sono ortogonalmente simili fra loro.

3. **Congruenza di matrici**

Proposizione Sia $\phi : V^n \times V^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare su V^n. Le matrici $Q_{\mathcal{B}}(\phi)$ e $Q_{\mathcal{B}'}(\phi)$ associate a ϕ relativamente a due basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V^n sono legate dalla relazione

$$Q_{\mathcal{B}'}(\phi) \; = \; {}^tM_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \, Q_{\mathcal{B}}(\phi) \, M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.$$

Dimostrazione. Le matrici associate a ϕ relativamente alle due basi sono caratterizzate dalle relazioni

$$\begin{aligned} \phi(u,v) \; &= \; {}^t(u)_{\mathcal{B}} \, Q_{\mathcal{B}}(\phi) \, (v)_{\mathcal{B}} \qquad \forall u,v \in V^n \\ \phi(u,v) \; &= \; {}^t(u)_{\mathcal{B}'} \, Q_{\mathcal{B}'}(\phi) \, (v)_{\mathcal{B}'} \qquad \forall u,v \in V^n, \end{aligned}$$

e le coordinate rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono legate dalla relazione

$$(z)_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(z)_{\mathcal{B}'} \qquad \forall z \in V^n.$$

Dunque per ogni $u, v \in V^n$ si ha

$$\begin{aligned} {}^t(u)_{\mathcal{B}'} \, Q_{\mathcal{B}'}(\phi) \, (v)_{\mathcal{B}'} \; &= \; {}^t(u)_{\mathcal{B}} \, Q_{\mathcal{B}}(\phi) \, (v)_{\mathcal{B}}, \\ {}^t(u)_{\mathcal{B}'} \, Q_{\mathcal{B}'}(\phi) \, (v)_{\mathcal{B}'} \; &= \; {}^t(M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(u)_{\mathcal{B}'}) \; Q_{\mathcal{B}}(\phi) \; (M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(v)_{\mathcal{B}'}) \\ {}^t(u)_{\mathcal{B}'} \, Q_{\mathcal{B}'}(\phi) \, (v)_{\mathcal{B}'} \; &= \; {}^t(u)_{\mathcal{B}'} \, \left({}^tM_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \, Q_{\mathcal{B}}(\phi) \, M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\right) \, (v)_{\mathcal{B}'}; \end{aligned}$$

da quest'ultima relazione, valida per ogni $u, v \in V^n$, si ha

$$Q_{\mathcal{B}'}(\phi) \;=\; {}^t M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\, Q_{\mathcal{B}}(\phi)\, M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.$$

Questa proposizione suggerisce la seguente definizione

Definizione Si dice che due matrici A e A' in $M_n(\mathbb{R})$ sono "congruenti", e si scrive $A \sim_c A'$ se esiste una matrice invertibile $E \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che

$$A' \;=\; {}^t EAE.$$

In base a questa definizione, si ha che matrici associate ad una stessa forma bilineare sono congruenti; si prova che vale anche il viceversa. Precisamente si ha la

Proposizione Due matrici A e A' in $M_n(\mathbb{R})$ sono congruenti se e solo se esiste una forma bilineare ϕ su V^n ed esistono due basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V^n tali che

$$A = Q_{\mathcal{B}}(\phi), \quad e \quad A' = Q_{\mathcal{B}'}(\phi).$$

La relazione di congruenza e' una relazione di equivalenza sull'insieme $M_n(\mathbb{R})$ e come tale suddivide l'insieme $M_n(\mathbb{R})$ in classi di equivalenza; informalmente si puo' dire che queste classi di equivalenza descrivono la struttura geometrica delle forme bilineari su V^n.

Proposizione Siano A e A' in $M_n(\mathbb{R})$; se $A \sim_c A'$ allora A e A' hanno lo stesso rango:

$$\rho(A) = \rho(A').$$

Non e' detto che matrici congruenti abbiano lo stesso polinomio caratteristico, e non e' nemmeno detto che abbiano lo stesso determinante. Infatti, da $A' = {}^t E\ A\ E$ segue

$$\det(A') = \det\left({}^t E\ A\ E\right) = \det\left({}^t E\right)\ \det(A)\ \det(E) =$$
$$\det(E)\ \det(A)\ \det(E) = \det(E)^2\ \det(A).$$

4. **Ortogonale congruenza di matrici**

La matrice associata ad una forma bilineare simmetrica rispetto ad una base (ortonormale o meno) e' simmetrica; la considerazione delle matrici simmetriche associate ad uno stessa forma bilineare rispetto alle varie basi ortonormali suggerisce la seguente

Definizione Si dice che due matrici simmetriche A e A' in $S_n(\mathbb{R})$ sono "ortogonalmente congruenti" e si scrive $A \sim_{oc} A'$ se esiste una matrice ortogonale $E \in O_n(\mathbb{R})$ tale che

$$A' \;=\; {}^t E\ A\ E.$$

In base a questa definizione, si ha che matrici simmetriche associate ad una stessa forma bilineare rispetto a basi ortonormali sono ortogonalmente congruenti; si prova che vale anche il viceversa. Precisamente si ha la

Proposizione Due matrici simmetriche A e A' in $S_n(\mathbb{R})$ sono ortogonalmente congruenti se e solo se esiste una forma bilineare simmetrica ϕ su V^n ed esistono due basi ordinate ortonormali $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V^n tali che

$$A = Q_{\mathcal{B}}(\phi), \quad e \quad A' = Q_{\mathcal{B}'}(\phi).$$

La relazione di ortogonale congruenza e' una relazione di equivalenza sull' insieme $S_n(\mathbb{R})$ e come tale suddivide l'insieme $S_n(\mathbb{R})$ in classi di equivalenza; informalmente si puo' dire che queste classi di equivalenza descrivono la struttura geometrica euclidea delle forme bilineari su V^n.

Matrici ortogonalmente congruenti sono in particolare matrici congruenti.

Il teorema spettrale per le forme bilineari simmetriche e' equivalente al seguente

Teorema Sia $A \in S_n(\mathbb{R})$, e sia D una matrice diagonale avente elementi diagonali gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di A (scritti in un qualsiasi ordine, ciascuno elencato tante volte quant'e' la sua molteplicita'). Allora A e' ortogonalmente congruente a D.

Da questo teorema segue il

Teorema Due matrici simmetriche $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ sono ortogonalmente congruenti se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

5. **Ortogonale similitudine e ortogonale congruenza**

Siano A e A' due matrici simmetriche in $S_n(\mathbb{R})$. Per definizione, si ha:

A e A' sono ortogonalmente simili se e solo se esiste una matrice ortogonale $E \in O_n(\mathbb{R})$ tale che

$$A' = E^{-1} A E;$$

A e A' sono ortogonalmente congruenti se e solo se esiste una matrice ortogonale $E \in O_n(\mathbb{R})$ tale che

$$A' = {}^tE A E.$$

Ora, una matrice E e' ortogonale se e solo se $E^{-1} = {}^tE$, dunque si ha che A e A' sono ortogonalmente simili se e solo se A e A' sono ortogonalmente equivalenti.

Diviene allora chiara la relazione fra il teorema spettrale per gli operatori autoaggiunti e il teorema spettrale per le forme bilineari simmetriche: questi due teoremi sono fra loro equivalenti in quanto sono entrambi equivalenti ad uno stesso teorema sulle matrici simmetriche.

Forme quadratiche, teorema spettrale e applicazioni

1. **Forme quadratiche**

   Definizione Un'applicazione $q : V^n \to \mathbb{R}$ si dice "forma quadratica" su V^n se esiste una forma bilineare simmetrica $\phi : V^n \times V^n \to \mathbb{R}$ tale che

   $$q(v) = \phi(v, v), \qquad \forall v \in V^n,$$

   (cfr. Definizione B.2).

   Se esiste, una forma quadratica ϕ su V^n che soddisfa la condizione sopra scritta, allora essa e' unica. Per ogni base ordinata $\mathcal{B}$ di V^n, la matrice simmetrica $Q_{\mathcal{B}}(\phi)$ associata a ϕ relativamente a $\mathcal{B}$ viene detta anche matrice associata a q relativamente a $\mathcal{B}$, e viene indicata anche con $Q_{\mathcal{B}}(q)$. Dunque si ha

   $$q(v) \;=\; {}^t(v)_{\mathcal{B}}\, Q_{\mathcal{B}}(q)\, (v)_{\mathcal{B}}, \qquad \forall v \in V^n.$$

   Esempio. Sia V^2 uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 2, e sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ una base ordinata di V^2. Ad ogni matrice simmetrica reale

   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

   corrisponde una forma bilineare $\phi : V^2 \times V^2 \to \mathbb{R}$, data da

   $$\phi(u, v) \;=\; {}^t(u)_{\mathcal{B}}\, A\, (v)_{\mathcal{B}} \qquad \forall u, v \in V^2,$$

   in altri termini da

   $$\begin{aligned} \phi(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2 \qquad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

   A questa forma bilineare corrisponde una forma quadratica $q : V^2 \to \mathbb{R}$, data da

   $$q(v) = \phi(v, v) \;=\; {}^t(v)_{\mathcal{B}}\, A\, (v)_{\mathcal{B}} \qquad \forall v \in V^2,$$

   in altri termini da

   $$\begin{aligned} q(x_1e_1 + x_2e_2) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

   Abbiamo ottenuto un polinomio omogeneo di II grado in due variabili reali; in questo modo si ottengono tutti i polinomi omogenei di II grado in due variabili reali, e ciascuno di essi si ottiene da una ed una sola matrice A.

In generale, sia V^n uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n, e sia $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base ordinata di V^n. Ad ogni matrice simmetrica $A = \left(a_{ij}\right)$ in $S_n(\mathbb{R})$ corrisponde una forma bilineare $\phi : V^n \times V^n \to \mathbb{R}$, data da

$$\phi(u, v) \ = \ {}^t(u)_{\mathcal{B}} \ A \ (v)_{\mathcal{B}} \qquad \forall u, v \in V^n,$$

in altri termini da

$$\begin{aligned}\phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) &= \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i y_j \\ &= \sum_{1 \le i \le n} a_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i) \qquad \forall (x_i), (y_j) \in V^n.\end{aligned}$$

A questa forma bilineare corrisponde una forma quadratica $q : V^n \to \mathbb{R}$, data da

$$q(v) = \phi(v, v) \ = \ {}^t(v)_{\mathcal{B}} \ A \ (v)_{\mathcal{B}} \qquad \forall v \in V^n,$$

in altri termini da

$$\begin{aligned}q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) &= \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{1 \le i \le n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2a_{ij} x_i x_j \qquad \forall (x_i) \in V^n.\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto un polinomio omogeneo di II grado in n variabili reali; in questo modo si ottengono tutti i polinomi omogenei di II grado in n variabili reali, e ciascuno di essi si ottiene da una ed una sola matrice A.

Il teorema spettrale per le matrici simmetriche ha la seguente versione per le forme quadratiche

Teorema Sia $A \in S_n(\mathbb{R})$ e sia D la matrice diagonale con elementi diagonali gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di A (scritti in un qualsiasi ordine, ciascuno elencato tante volte quant'e' la sua molteplicita'). Sia $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base ordinata ortonormale di V^n, e sia $q : V^n \to \mathbb{R}$ la forma quadratica su V^n tale che $Q_{\mathcal{B}}(q) = A$. Allora esiste una base ordinata ortonormale $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ di V^n tale che $Q_{\mathcal{B}'}(q) = D$, in altri termini

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right) = \sum_{1 \le i \le n} \lambda_i x_i^2 \qquad \forall (x_i) \in \mathbb{R}^n.$$

2. **Applicazione: riconoscimento di coniche a centro**

Fissato nel piano euclideo elementare un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in un punto O, consideriamo l'insieme $\mathcal{I}$

dei punti del piano le cui coordinate (x_1, x_2) rispetto al sistema di riferimento dato soddisfano un'equazione del tipo

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 1,$$

dove a, b, c sono costanti reali, e ci poniamo il problema di determinare le caratteristiche geometriche di un tale insieme.

Identifichiamo ciascun punto del piano col vettore applicato in O avente tale punto come estremo libero, e consideriamo il piano vettoriale euclideo $\mathfrak{F}_2(O)$ dei vettori applicati in O. Sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base ordinata ortonormale di $\mathfrak{F}_2(O)$ costituita dai vettori e_1 ed e_2 associati ai punti unita' sul primo e sul secondo asse del sistema di riferimento.

Indichiamo con $q : \mathfrak{F}_2(O) \to \mathbb{R}$ la forma quadratica su $\mathfrak{F}_2(O)$ data da

$$q(x_1e_1 + x_2e_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ed indichiamo con A la matrice associata a q relativamente alla base $\mathcal{B}$:

$$A = Q_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Per il teorema spettrale, indicati con $\lambda \geq \mu$ gli autovalori della matrice A ed indicata con D la matrice diagonale avente elementi diagonali λ, μ, si ha che esiste una base ortonormale $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ di $\mathfrak{F}_2(O)$ tale che $Q_{\mathcal{B}'}(\phi) = D$, cioe'

$$q(y_1f_1 + y_2f_2) = \lambda y_1^2 + \mu y_2^2 \qquad \forall (y_1, y_2) \in R^2.$$

Dunque, prendendo nel piano euclideo elementare il sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O associato alla base ortonormale $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ l'insieme $\mathcal{I}$ si puo' descrivere come l'insieme dei punti del piano le cui coordinate (y_1, y_2) rispetto a questo nuovo sistema di riferimento soddisfano l'equazione

$$\lambda y_1^2 + \mu y_2^2 = 1.$$

Si puo' allora provare che

- per $\lambda \geq \mu > 0$, l'insieme $\mathcal{I}$ e' un'ellisse;
- per $\lambda > 0$ e $\mu = 0$, l'insieme $\mathcal{I}$ e' una coppia di rette parallele;
- per $\lambda > 0$ e $\mu < 0$, l'insieme $\mathcal{I}$ e' un'iperbole;
- per $0 \geq \lambda \geq \mu$, l'insieme $\mathcal{I}$ e' vuoto.

Esempio. Fissato nel piano euclideo elementare un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in un punto O, consideriamo l'insieme $\mathcal{I}$ dei punti del piano le cui coordinate (x_1, x_2) rispetto al sistema di riferimento dato soddisfano l'equazione

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1,$$

e ci poniamo il problema di determinare le caratteristiche geometriche di un tale insieme.

Identifichiamo ciascun punto del piano col vettore applicato in O avente tale punto come estremo libero, e consideriamo il piano vettoriale euclideo $\mathfrak{F}_2(O)$ dei vettori applicati in O. Sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base ordinata ortonormale di $\mathfrak{F}_2(O)$ costituita dai vettori e_1 ed e_2 associati ai punti unita' sul primo e sul secondo asse del sistema di riferimento.

Indichiamo con $q : \mathfrak{F}_2(O) \to \mathbb{R}$ la forma quadratica su $\mathfrak{F}_2(O)$ data da

$$q(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ed indichiamo con A la matrice associata a q relativamente alla base $\mathcal{B}$:

$$A = Q_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A e'

$$\Delta_A(t) = \det(tI_2 - A) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 1/2 \\ 1/2 & t-1 \end{pmatrix} = t^2 - 2t + 3/4;$$

gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$\Delta_A(t) = t^2 - 2t + 3/4 = 0,$$

e sono dunque $3/2$ e $1/2$. Per il teorema spettrale, si ha che esiste una base ortonormale $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ di $\mathfrak{F}_2(O)$ tale che

$$q(y_1f_1 + y_2f_2) = \frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 \qquad \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Dunque, prendendo nel piano euclideo elementare il sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O associato alla base ortonormale $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ l'insieme $\mathcal{I}$ si puo' descrivere come l'insieme dei punti del piano le cui coordinate (y_1, y_2) rispetto a questo nuovo sistema di riferimento soddisfano l'equazione

$$\frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = 1.$$

Si puo' allora vedere che l'insieme $\mathcal{I}$ e' un'ellisse.

3. **Applicazione: grafico delle forme quadratiche su $\mathbb{R}^2$**

Sia $\mathbb{R}^2$ lo spazio vettoriale euclideo standard 2-dimensionale, e sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Consideriamo una forma quadratica $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$q(x_1e_1 + x_2e_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

dove a, b, c sono costanti reali, e ci poniamo il problema di studiarne il grafico

$$grafico(q) = \{(v, q(v));\ v \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Per il teorema spettrale, indicati con $\lambda \geq \mu$ gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

si ha che esiste una base ortonormale $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ di $\mathbb{R}^2$ tale che la funzione q si puo' descrivere come

$$q(y_1 f_1 + y_2 f_2) = \lambda y_1^2 + \mu y_2^2 \qquad \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Studiando le curve di livello di q puo' allora provare in particolare che

- per $\lambda \geq \mu > 0$, il grafico di q e' un "paraboloide ellittico" con concavita' rivolta verso l'alto (cfr. Figura 12.6, fine Capitolo 12);
- per $\lambda > 0$ e $\mu = 0$, il grafico di q e' un "cilindro parabolico" con concavita' rivolta verso l'alto;
- per $\lambda > 0$ e $\mu < 0$, il grafico di q e' una "sella", altrimenti detta "paraboloide iperbolico" (cfr. Figura 12.7, fine Capitolo 12) ;
- per $\lambda = 0$ e $\mu < 0$, il grafico di q e' un "cilindro parabolico" con concavita' rivolta verso il basso;
- per $0 > \lambda \geq \mu$, il grafico di q e' un "paraboloide ellittico" con concavita' rivolta verso il basso.

4. **Forme definite**

Definizione Una forma quadratica $q : V^n \to \mathbb{R}$ si dice

- "definita positiva" se $q(v) > 0$ per ogni $v \in V^n$ con $v \neq 0$;
- "semidefinita positiva" se $q(v) \geq 0$ per ogni $v \in V^n$;
- "indefinta" se esistono $u, v \in V^n$ tali che $q(u) > 0 > q(v)$;
- "semidefinita negativa" se $q(v) \leq 0$ per ogni $v \in V^n$;
- "definita negativa" se $q(v) < 0$ per ogni $v \in V^n$ con $v \neq 0$.

Per il teorema spettrale, indicata con $A = Q_{\mathcal{B}}(q)$ la matrice associata a q relativamente ad una base ortonormale $\mathcal{B}$, ed indicati con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di A (scritti in un qualsiasi ordine, ciscuno scritto tante volte quant'e' la sua molteplicita') esiste una base ortonormale $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ di V^n tale che

$$q\left(\sum_1^n y_i f_i\right) = \sum_1^n \lambda_i y_i^2 \qquad \forall (y_i) \in \mathbb{R}^n.$$

Si ha dunque che q e' definita positiva, semidefinita positiva, semidefinita negativa, definita negativa se e solo se tuttii gli autovalori di A sono rispettivamente positivi, maggiori o uguali a zero, minori o uguali a zero, negativi; inoltre q e' indefinita se e solo se esistono due autovalori di A di segno discorde,

Determinare gli autovalori di una matrice in generale e' un problema complicato, poiche' determinare le radici di un polinomio e' un problema complicato (cfr. Osservazione A.6, fine Appendice A). Un criterio efficiente per stabilire se una forma quadratica e' definita positiva o negativa e' dato dal seguente

Teorema Sia $q : V^n \to \mathbb{R}$ una forma quadratica su V^n, sia $Q_{\mathcal{B}}(q) = (a_{ij})$ la matrice associata a q relativamente ad una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V^n, e siano $M_1 = (a_{11})$, $M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, ... i "minori di nord-ovest" di A. Allora

- q e' definita positiva se e solo se $\det(M_i) > 0$ per ogni i;
- q e' definita negativa se e solo se $\det(M_i)$ e' positivo o negativo secondo che i sia pari o dispari.