Ci sono almeno due modi di definire l'anello $\mathbb{K}[t]$ dei polinomi in una indeterminata t a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$.

1. Primo modo, un po' informale. L'anello $\mathbb{K}[t]$ e' un anello commutativo con unita' 1 contenente in modo consistente il campo $\mathbb{K}$ e l'indeterminata t tale che: (1) ogni elemento di $\mathbb{K}[t]$ si puo' scrivere come un'espressione ottenuta dagli elementi di $\mathbb{K}$ e da t mediante le operazioni di somma e di prodotto; (2) due tali espressioni sono uguali se e solo se si possono ottenere l'una dall'altra usando solo le operazioni definite su $\mathbb{K}$ e le proprieta' che somma e prodotto posseggono in un anello (proprieta' associativa e commutativa della somma e del prodotto, proprieta' distributiva del prodotto rispetto alla somma). Gli elementi dell'anello $\mathbb{K}[t]$ si dicono "polinomi nell'indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{K}$" e vengono indicati con simboli come $a(t), b(t), \ldots$ Un polinomio del tipo at^i con $a \neq 0$ e $i \in \mathbb{N}_0$ si dice "monomio" di grado i con coefficiente a; due monomi dello stesso grado si dicono "simili". Si ha che ogni polinomio non nullo $p(t)$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come somma di monomi a due a due non simili, cioe' nella forma

   $$p(t) = a_{i_1}t^{i_1} + a_{i_2}t^{i_2} + \cdots + a_{i_m}t^{i_m}$$

   dove $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ e $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m} \neq 0$; questa scrittura si dice "scrittura canonica" di $p(t)$. Dati due polinomi $p(t)$ e $q(t)$ mediante le loro scritture canoniche, il calcolo del polinomio somma $p(t) + q(t)$ consiste essenzialmente nel trasformare la scrittura somma dalle scritture di $p(t)$ e $q(t)$ in forma canonica. Analogamente per il polinomio prodotto $p(t)q(t)$.

   Esempio. In $\mathbb{R}[t]$, date le scritture canoniche di due polinomi $p(t) = 1 - 2t + t^2$ e $q(t) = 1 + 2t + t^3$ si ha che il polinomio somma $p(t) + q(t)$ ha scrittura canonica $p(t) + q(t) = 2 + t^2 + t^3$ e il polinomio prodotto $p(t)q(t)$ ha scrittura canonica $p(t)q(t) = 1 - 3t^2 + 3t^3 - 2t^4 + t^5$.

   Questa definizione dell'anello dei polinomi $\mathbb{K}[t]$ su un campo $\mathbb{K}$ e' la piu' vicina alla definizione dell'anello dei polinomi $\mathbb{R}[t]$ sul campo $\mathbb{R}$ dei reali nota dall'algebra elementare, e i calcoli concreti in $\mathbb{K}[t]$ si fanno cosi' come si fanno i calcoli concreti in $\mathbb{R}[t]$.

2. Secondo modo, piu' formale. L'anello $\mathbb{K}[t]$ ha per elementi le scritture formali

   $$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_it^i$$

   dove $a_0, a_1, a_2, \ldots$ e' una successione "definitivamente nulla" di elementi di $\mathbb{K}$, cioe' tale che esiste un indice $m \in \mathbb{N}_0$ per il quale $a_i = 0$ per ogni $i > m$. Una tale scrittura si dice "polinomio nell'indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{K}$;"

l'elemento a_i si dice $i-$mo coefficiente del polinomio $p(t)$. Dati due polinomi

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i t^i,$$
$$q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} b_i t^i,$$

si definisce il polinomio somma ponendo

$$\begin{aligned} p(t) + q(t) &= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \cdots \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}_0} c_i t^i, \quad dove \quad c_i = a_i + b_i \end{aligned}$$

e si definisce il polinomio prodotto ponendo

$$\begin{aligned} p(t)q(t) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)t^2 + \cdots \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}_0} d_i t^i, \quad dove \quad d_i = \sum_{h+k=i} a_h b_k; \end{aligned}$$

si verifica che questa definizione e' ben posta, cioe' che la successione $c_0, c_1, \ldots$ dei coefficienti di $p(t) + q(t)$ e la successione $d_0, d_1, \ldots$ dei coefficienti di $p(t)q(t)$ sono definitivamente nulle. Si verifica che queste operazioni conferiscono all'insieme $\mathbb{K}[t]$ la struttura di anello con unita'.

Esercizio. In $\mathbb{R}[t]$ sono dati i due polinomi $p(t) = 1 + (-2)t + 1t^2 + 0t^3 + \cdots$ e $q(t) = 1 + 2t + 0t^2 + 1t^3 + 0t^4 + \cdots$; usando la defiizione data sopra, si calcoli il polinomio somma $p(t) + q(t)$ e il polinomio prodotto $p(t)q(t)$.

Questa definizione dell'anello dei polinomi $\mathbb{K}[t]$ su un campo $\mathbb{K}$ e' particolarmente utile per lo sviluppo della teoria.

La relazione fra le due definizioni si puo' descrivere brevemente come segue. Ogni polinomio nel senso della prima definizione ammette una scrittura canonica

$$a_{i_1} t^{i_1} + \cdots + a_{i_m} t^{i_m}$$

dove $0 \leq i_1 < \ldots < i_m$ e $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m} \neq 0$; a questa scrittura corrisponde la scrittura formale

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i t^i$$

ottenuta ponendo $a_i = 0$ per ogni $i \neq i_1, \ldots, i_m$; si ha cosi' una corrispondenza biunivoca, e questa corrispondenza biunivoca e' consistente con le operazioni secondo la prima e la seconda definizione. Si noti che in particolare a ciascun elemento a di $\mathbb{K}$ corrisponde la scrittura formale $a + 0t + 0t^2 + \cdots$ e alla indeterminata t corrisponde la scrittura formale $0 + 1t + 0t^2 + \cdots$.