Note preliminari.
1- Qualche questione e' stata posta piu' volte durante il corso; di volta in volta gli strumenti a disposizione per la soluzione aumentano; di regola, quando una questione verra' posta in una prova d'esame si potranno usare tutti gli strumenti dati durante il corso; talvolta pero' potrebbe essere chiesto di risolvere una questione usando un particolare strumento; spesso verra' chiesto di verificare la soluzione di una questione usando solo le definizioni.
2- Alcune questioni ammettono piu' soluzioni; alcune caratteristiche sono comuni a tutte le soluzioni, e dunque possono essere usate per confrontare due particolari soluzioni; ad esempio la questione di determinare una base di un sottospazio ammette infinite soluzioni, ma tutte le basi del sottospazio saranno costituite da uno stesso numero di vettori.
3- Di seguito si riportano risoluzioni di alcuni esrecizi dati durante il corso per esemplificare il grado di motivazione richiesto nella risoluzione; in realta' si tratta di tracce di risoluzioni, nelle quali viene lasciato al lettore il compito di dare delle motivazioni o di fare dei conti.

1. **Lezioni 14 e 15; esercizio 2.** Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ una trasformazione lineare. Quali sono le possibili dimensioni del nucleo Ker$T$ e dell'immagine ImT di T? Per ciascuna di tali possibilita' si dia un esempio di una trasformazione lineare che la realizza.

   Risoluzione (traccia). Le dimensioni $\dim(\mathrm{Ker}T)$ e $\dim(\mathrm{Im}T)$ sono numeri naturali soggetti ai vincoli

   $$0 \leq \dim(\mathrm{Ker}T) \leq 5, \qquad 0 \leq \dim(\mathrm{Im}T) \leq 2,$$

   e soddisfano l'equazione dimensionale di Grassmann

   $$\dim(\mathrm{Ker}T) + \dim(\mathrm{Im}T) = 5.$$

   Dunque le uniche possibilita' sono

$\dim(\mathrm{Ker}T)$	$\dim(\mathrm{Im}T)$
5	0
4	1
3	2

   Una trasformazione lineare che realizza l'ultima possibilita'; siano $e_1, e_2, \ldots, e_5$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^5$, e siano f_1, f_2 i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$, e sia T la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ tale che

   $$T(e_1) = T(e_2) = T(e_3) = 0, \quad T(e_4) = f_1,\ T(e_5) = f_2.$$

   Per come e' definita T si ha $\dim(\mathrm{Ker}T) \geq 3$ e $\dim(\mathrm{Im}T) \geq 2$ e dunque per l'equazione dimensionale si deve avere $\dim(\mathrm{Ker}T) = 3$ e $\dim(\mathrm{Im}T) = 2$. (Dare gli altri esempi).

2. **Lezioni 19 e 20; esercizio 5.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $a_1 = (1,2,4)$, $a_2 = (1,3,9)$ e $b = (1,1,1)$. Il vettore b appartiene alla chiusura lineare $L(a_1, a_2)$? Si determini una rappresentazione cartesiana di $L(a_1, a_2)$.

   Risoluzione (traccia).

   - Si ha che
   $$b \in L(a_1, a_2) \quad sse \quad \rho\left((a_1|a_2)\right) = \rho\left((a_1|a_2|b)\right).$$
   Da una parte si ha che $\rho\left((a_1|a_2)\right) = 2$ (perche'?).
   Dall'altra si ha che
   $$(a_1|a_2|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \quad \dots \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
   dunque $\rho\left((a_1|a_2|b)\right) = 3$ (perche'?).
   Dai punti precedenti si ha
   $$\rho\left((a_1|a_2)\right) = 2 < 3 = \rho\left((a_1|a_2|b)\right);$$
   dunque $b \notin L(a_1, a_2)$.
   Altro modo. In questo caso si puo' impostare la soluzione anche nel modo seguente. Osservato che a_1, a_2 sono linearmente indipendenti, si ha
   $$b \in L(a_1, a_2) \quad sse \quad \det(a_1|a_2|b) = 0.$$
   (Completare).
   - Sia $x = (x^1, x^2, x^3)$ generico in $\mathbb{R}^3$; per il punto precedente si ha che $x \in L(a_1, a_2)$ se e solo se
   $$\rho\left((a_1|a_2|x)\right) = 2.$$
   Si ha che
   $$(a_1|a_2|x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x^1 \\ 2 & 3 & x^2 \\ 4 & 9 & x^3 \end{pmatrix} \sim \quad \dots \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x^1 \\ 0 & 1 & x^2 - 2x^1 \\ 0 & 0 & x^3 - 5x^2 + 6x^1 \end{pmatrix},$$
   dunque $\rho\left((a_1|a_2|x)\right) = 2$ se e solo se $x^3 - 5x^2 + 6x^1 = 0$.
   Dai punti precedenti si ha che $x \in L(a_1, a_2)$ se e solo se
   $$x^3 - 5x^2 + 6x^1 = 0,$$
   e questa e' l'equazione cartesiana di $L(a_1, a_2)$.
   Altro modo. In questo caso si puo' impostare la soluzione anche nel modo seguente. Osservato che a_1, a_2 sono linearmente indipendenti, si ha
   $$x \in L(a_1, a_2) \quad sse \quad \det(a_1|a_2|x) = 0.$$
   (Completare).

3. **Lezioni 23 e 24; esercizio 1.** Sia V^3 uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbb{R}$, e siano $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ due basi ordinate di V^3 legate dalle relazioni

$$f_1 = e_1 + e_3, \qquad f_2 = e_1 + e_2, \qquad f_3 = e_2 + e_3,$$

e sia $P : V^3 \to V^3$ l'operatore lineare definito assegnando

$$P(e_1) = e_1, \qquad P(e_2) = 0, \qquad P(e_3) = 0.$$

Si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}}(P)$ associata a P relativamente alla base ordinata $\mathcal{B}$ e si determini, usando la relazione fra le matrici associate ad un operatore lineare relativamente a due basi ordinate, la matrice $M_{\mathcal{B}}(P)$ associata a P relativamente alla base ordinata $\mathcal{B}'$.

Risoluzione (traccia). La matrice $M_{\mathcal{B}}(P)$ associata a P relativamente alla base ordinata $\mathcal{B}$ e'

$$M_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

per la relazione fra le matrici associate ad un operatore lineare relativamente a due basi ordinate si ha

$$M_{\mathcal{B}'}(P) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}) M_{\mathcal{B}}(P) M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathrm{Id}).$$

Per la relazione data fra le due basi abbiamo

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

si ha dunque

$$M_{\mathcal{B}'}(P) = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathrm{Id})^{-1} M_{\mathcal{B}}(P) M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \dots.$$