1. Insiemi di generatori, lineare indipendenza, basi, dimensione.

   Consideriamo nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ i seguenti vettori: $v_1 = (0,1,2)$, $v_2 = (1,1,1)$, $v_3 = (-2,-1,0)$, $v_4 = (3,3,2)$. Siano poi

   $F_1 = \{v_1, v_2\}$, $F_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $F_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ degli insiemi di vettori.

   (a) a) Per ciascuno dei tre insiemi stabilire se e' linearmente indipendente;

   (b) b) per ciascuno dei tre insiemi stabilire se e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$;

   (c) c) per ciascun insieme linearmente indipendente, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ che lo contenga;

   (d) d) per ciascun sistema di generatori determinare una base di $\mathbb{R}^3$ in esso contenuta.

   Soluzione

   (a) L'insieme F_1 e' linearmente indipendente; gli insiemi F_2 ed F_3 sono linearmente dipendenti.

   (b) Gli insiemi F_1 ed F_2 non sono sistemi di generatori per $\mathbb{R}^3$; l'insieme F_3 e' un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$.

   (c) Una base di $\mathbb{R}^3$ che contiene l'insieme linearmente indipendente F_1 e' l'insieme $\{v_1, v_2, e_1\}$, dove $e_1 = (1,0,0)$. Ci sono infinite basi di $\mathbb{R}^3$ che contengono l'insieme F_1; sono gli insiemi del tipo $\{v_1, v_2, v\}$, dove il vettore $v = (p,q,r)$ soddisfa la condizione $p - 2q + r \neq 0$.

   (d) Una base di $\mathbb{R}^3$ contenuta nel sistema di generatori F_3 e' l'insieme $\{v_1, v_2, v_4\}$. Ci sono tre basi di $\mathbb{R}^3$ contenute nell'insieme F_3; sono tutti i sottinsiemi di F_3 formati da tre vettori, tranne $\{v_1, v_2, v_3\}$.

2. Esercizio 2 - Algebra dei sottospazi vettoriali.

   Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $U = L(v_1, v_2, v_3)$ e $W = Sol(A;0)$, dove $v_1 = (1,-1,-1,-2)$, $v_2 = (2,1,2,2)$, $v_3 = (1,2,3,4)$ e $A = (1,0,0,-1)$.

   (a) Determinare una base e la dimensione di U;

   (b) determinare una base e la dimensione di W;

   (c) determinare una rappresentazione cartesiana di U;

   (d) determinare la dimensione di $U \cap W$;

   (e) determinare la dimensione di $U + W$.

   Soluzione

(a) Una base del sottospazio U e' $\{v_1, v_2\}$; ci sono infinite basi di U, tutte formate da due vettori.

(b) Una base del sottospazio W e' $\{w_1, w_2, w_3\}$, dove $w_1 = (0,1,0,0)$, $w_2 = (0,0,1,0)$, $w_3 = (1,0,0,1)$; ci sono infinite basi di W, tutte formate da tre vettori.

(c) una rappresentazione cartesiana di U e' data dal sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x^1 + 4x^2 - 3x^3 = 0 \\ 2x^2 - x^4 = 0 \end{cases};$$

in breve: $U = Sol(B, 0)$ dove

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

ci sono infinite rappresentazioni cartesiane di U, tutte costituite da due equazioni lineari omogenee linearmente indipendenti.

(d) $\dim(U \cap W) = 1$;

(e) $\dim(U + W) = 4$.

3. Sistemi lineari, matrici e trasformazioni lineari.

E' assegnato il sistema lineare:

$$\begin{cases} \quad\;\; y \qquad\quad\; = 2 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases}$$

(a) Trovare la soluzione del sistema in $\mathbb{R}^3$ mediante il metodo di Gauss.

(b) Trovare la soluzione del sistema in $\mathbb{R}^3$ mediante il metodo di Cramer.

(c) Sia A la matrice dei coefficienti associata al sistema; dopo aver determinato quali fra le seguenti matrici rappresenta A^{-1}, calcolare la soluzione del sistema sfruttando l'inversa della matrice.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -11 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -11 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione

(a) Il sistema ha la soluzione $(-25, 2, 7)$.

(b) Il sistema ha la soluzione $(-25, 2, 7)$.

(c) L'unica matrice che rappresenta A^{-1} e'

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

il sistema ha la soluzione $(-25, 2, 7)$.

4. Autovalori ed autovettori.

Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che, secondo la base canonica $B = (e_1, e_2)$, e' rappresentato da:

$$T(e_1) = (2+c)e_1 + 3e_2$$
$$T(e_2) = -3e_1 + (2-c)e_2$$

(a) Determinare gli autovalori di T al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$;

(b) determinare i valori di c per i quali T e' diagonalizzabile;

(c) per ciascuno di questi valori di c scrivere le matrici diagonali che rappresentano T;

(d) nel caso $c = 5$ scrivere una base spettrale per T e una matrice diagonale che rappresenta T rispetto a tale base.

Soluzione

(a) Il polinomio caratteristico di T e'

$$\Delta_T(t) = t^2 - 4t + 9 - c^2;$$

gli autovalori di T sono le sue radici

$$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{9 - c^2};$$

dunque: per $c < -3$ e $c > 3$ l'operatore T ha due autovalori reali ciascuno di molteplicita' algebrica 1, per $c = \pm 3$ l'operatore T ha un autovalore reale di molteplicita' algebrica 2, per $-3 < c < 3$ l'operatore T non ha autovalori reali;

(b) T e' diagonalizzabile per i valori di c tali che $c < -3$ o $c > 3$;

(c) per ciascun c tale che $c < -3$ o $c > 3$, le matrici diagonali che rappresentano T sono

$$\begin{pmatrix} 2+\sqrt{9-c^2} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{9-c^2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2-\sqrt{9-c^2} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{9-c^2} \end{pmatrix}.$$

(d) nel caso $c = 5$ una base spettrale ordinata per T e' $((-3,1),(1,-3))$; la matrice diagonale che rappresenta l'operatore T rispetto a questa base e'

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Spazi vettoriali euclidei.

   Nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $a_1 = (1,1,0,0)$, $a_2 = (1,0,1,0)$ e $b = (1,0,0,1)$. Sia U il sottospazio generato da a_1 ed a_2.

   (a) Determinare una base ortogonale di U;

   (b) determinare la proiezione ortogonale di b su U;

   (c) verificare il risultato trovato.

   Soluzione

   (a) Una base ortogonale di U e' $\{c_1, c_2\}$, dove $c_1 = (1,1,0,0)$, $c_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)$;

   (b) la proiezione ortogonale di b su U e'

   $$p_U(b) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$$

   (c) bisogna verificare che il vettore trovato soddisfa le condizioni

   $$p_U(b) \in U, \quad e \quad (b - p_U(b)) \in^{\perp} U;$$

   questa seconda condizione equivale a $(b - p_U(b)) \perp a_1, a_2$.

6. Operatori lineari autoaggiunti, forme bilineari simmetriche.

   Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ e' assegnato il piano $\pi : x - y = 0$. Sia P la proiezione ortogonale sul piano π.

   (a) Determinare i vettori trasformati dei vettori e_1, e_2 ed e_3 della base canonica;

   (b) verificare che l'operatore P e' autoaggiunto;

   (c) determina gli autovalori di P;

   (d) determinare una base ordinata spettrale ortonormale di P e scrivere la matrice relativa.

   Soluzione

   (a) I trasformati dei vettori e_1, e_2 ed e_3 della base canonica sono:

   $$P(e_1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \quad P(e_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \quad P(e_3) = (0,0,1).$$

(b) l'operatore P e' autoaggiunto in quanto la matrice associata a P rispetto ad una base ortonormale (quella canonica) e' simmetrica;

(c) gli autovalori di P sono: 1 di molteplicita' algebrica 2 e 0 di molteplicita' algebrica 1;

(d) una base ordinata spettrale ortonormale di P e' (v_1, v_2, w), dove $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $w = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$; la matrice che rappresenta T relativamente a questa base e'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$