1. **Esercizio 1 - Insiemi di generatori, lineare indipendenza, basi, dimensione.**

   Consideriamo nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ i seguenti vettori: $v_1 = (0,1,2)$, $v_2 = (1,1,1)$, $v_3 = (-2,-1,0)$, $v_4 = (3,3,2)$. Siano poi

   $F_1 = \{v_1, v_2\}$, $F_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $F_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ degli insiemi di vettori.

   (a) a) Per ciascuno dei tre insiemi stabilire se e' linearmente indipendente;

   (b) b) per ciascuno dei tre insiemi stabilire se e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$;

   (c) c) per ciascun insieme linearmente indipendente, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ che lo contenga;

   (d) d) per ciascun sistema di generatori determinare una base di $\mathbb{R}^3$ in esso contenuta.

   Soluzione

   (a)
   - F_1 e' linearmente indipendente (da motivare).
   - Considero $F_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$.
     I modo: per definizione, v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti se e solo se l'equazione

     $$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \underline{0}$$

     nelle incognite $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ha l'unica soluzione $\alpha = \beta = \gamma = 0$; nel nostro caso l'equazione e'

     $$\alpha(0,1,2) + \beta(1,1,1) + \gamma(-2,-1,0) = (0,0,0),$$

     che e' equivalente al sistema lineare

     $$\begin{cases} \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases},$$

     inizio a risolvere questo sistema (farlo), mi accorgo che questo sistema ha infinite soluzioni (quando me ne accorgo?), dunque i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.
     II modo: considero la matrice

     $$(v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

     le applico l'algoritmo di Gauss e ottengo la matrice a gradini

     $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\widetilde{v_1}|\widetilde{v_2}|\widetilde{v_3}),$$

osservo che $\widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}, \widetilde{v_3}$ sono linearmente dipendenti dunque v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti; l'insieme F_2 e' linearmente dipendente.

- Considero l'insieme $F_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; ho un numero di vettori (4) maggiore della dimensione (3) dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, dunque questi vettori sono linearmente dipendenti.

(b)
- Considero l'insieme $F_1 = \{v_1, v_2\}$; ho un numero di vettori (2) minore della dimensione (3) dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, dunque questi vettori non generano $\mathbb{R}^3$.
- Considero l'insieme $F_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$; ho un numero di vettori (3) pari alla dimensione (3) dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, dunque questi vettori generano $\mathbb{R}^3$ se e solo se sono linearmente indipendenti; so che sono linearmente dipendenti, dunque non generano $\mathbb{R}^3$.
- Considero l'insieme $F_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
  I modo. Per definizione, i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 generano $\mathbb{R}^3$ se e solo se per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ l'equazione
  $$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 = v$$
  nelle incognite $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ha almeno una soluzione; nel nostro caso l'equazione e'
  $$\alpha(0,1,2) + \beta(1,1,1) + \gamma(-2,-1,0) + \delta(3,3,2) = (p,q,r),$$
  dove p, q, r sono parametri, questa equazione e' equivalente al sistema lineare
  $$\begin{cases} \beta - 2\gamma + 3\delta = p \\ \alpha + \beta - \gamma + 3\delta = q \\ 2\alpha + \beta + 2\delta = r \end{cases},$$
  inizio a risolvere questo sistema (farlo), mi accorgo che per ogni p, q, r questo sistema ha soluzioni (quando me ne accorgo?), dunque i vettori v_1, v_2, v_3 generano $\mathbb{R}^3$.
  II modo. Ho che vettori v_1, v_2, v_3, v_4 generano $\mathbb{R}^3$ se e solo se la loro chiusura lineare $L(v_1, v_2, v_3, v_4)$ ha dimensione = 3; la dimensione di $L(v_1, v_2, v_3, v_4)$ e' uguale al rango della matrice
  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
  le applico l'algoritmo di Gauss e ottengo la matrice a gradini
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
  osservo che questa matrice ha rango 3, dunque v_1, v_2, v_3, v_4 generano $\mathbb{R}^3$.

(c) L'unico insieme linearmente indipendente e' $F_2 = \{v_1, v_2\}$; ho un insieme linearmente indipendente formato da un numero di vettori (2) minore della dimensione dello spazio (3), dunque so che posso trovare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che l'insieme $\{v_1, v_2, v\}$ sia ancora linearmente indipendente; un tale insieme linearmente indipendente formato da un numero di vettori (3) uguale della dimensione dello spazio (3) sara' anche una base di $\mathbb{R}^3$.

I modo. Mi posso limitare a cercare v fra i vettori della base canonica; trovo che $V = e_1$ va bene (verificarlo); dunque $\{v_1, v_2, e_1\}$ e' una base di $\mathbb{R}^3$.

II modo. Osservo che $v_4 \notin L(v_1, v_2)$ (perche'?), dunque trovo che $v = v_4$ va bene; dunque $\{v_1, v_2, v_4\}$ e' una base di $\mathbb{R}^3$.

(d) L'unico insieme di generatori e' $F_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; ho un insieme di generatori formato da un numero di vettori (4) maggiore della dimensione dello spazio (3), dunque so che posso togliere da questo insieme un vettore v_i tale che l'insieme risultante sia ancora un insieme di generatori; un tale insieme di generatori formato da un numero di vettori (3) uguale della dimensione dello spazio (3) sara' una base di $\mathbb{R}^3$.

I modo. Considero la matrice

$$(v_1|v_2|v_3|v_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

so che applicandole l'algoritmo di Gauss e ottengo la matrice a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\widetilde{v_1}|\widetilde{v_2}|\widetilde{v_3}|\widetilde{v_4})$$

su questa matrice a gradini osservo che i vettori $\widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}, \widetilde{v_4}$ sono linearmente indipendenti, dunque i vettori v_1, v_2, v_4 sono linearmente indipendenti, ed essendo in $\mathbb{R}^3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

II modo. Se il punto precedente si era svolto nel II modo, allora si poteva concludere subito che una base contenuta in $F_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e' data da $\{v_1, v_2, v_4\}$.

2. Spazi vettoriali euclidei.

Nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $a_1 = (1,1,0,0)$, $a_2 = (1,0,1,0)$ e $b = (1,0,0,1)$. Sia U il sottospazio generato da a_1 ed a_2.

(a) Determinare una base ortogonale di U;

(b) determinare la proiezione ortogonale di b su U;

(c) verificare il risultato trovato.

Soluzione

(a) Alla base ordinata (a_1, a_2) di U applico il prodedimento di Gram-Schmidt ed ottengo una base ordinata ortogonale (u_1, u_2) di U :

$$u_1 = a_1 = (1,1,0,0)$$
$$u_2 = a_2 - pr_{u_1}(a_2) = a_2 - \frac{\langle u_1, a_2\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = \ldots = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0);$$

(b) il vettore proiezione ortogonale di b su U e' dato da

$$p_U(b) = p_{u_1}(b) + p_{u_2}(b) = \frac{\langle u_1, b\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 + \frac{\langle u_2, b\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 = \ldots = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$$

(c) bisogna verificare che il vettore trovato soddisfa le condizioni

$$p_U(b) \in U, \quad e \quad (b - p_U(b)) \in^{\perp} U;$$

questa seconda condizione equivale a $(b - p_U(b)) \perp a_1, a_2$. (Verificare che queste condizioni sono soddisfatte).