Laboratorio di Matematica, 07.10.2003

1. Lo scopo di questa lezione e' di estendere la definizione di lunghezza, angolo, prodotto scalare a vettori dello spazio R^n e di iniziare a mostrare come le principali proprieta' e teoremi rimangano validi in questo contesto piu' generale.

2. **Def.** *Il prodotto scalare del vettore* $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *per il vettore* $\underline{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ *in* R^n *e' il numero reale* $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ *definito da*

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underline{v}^T \underline{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n.$$

Se $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$, *i vettori* $\underline{v}$ *e* $\underline{w}$ *si dicono ortogonali, e si scrive* $v \perp w$.

- **Es.** I vettori della base canonica di R^n

$$\begin{array}{lcl} \underline{e}_1 & = & (1, \ 0, \ \ldots, \ 0, \ 0) \\ \underline{e}_2 & = & (0, \ 1, \ \ldots, \ 0, \ 0) \\ \ldots & & \\ \underline{e}_n & = & (0, \ 0, \ \ldots, \ 0, \ 1) \end{array}$$

sono a due a due ortogonali:

$$\underline{e}_i \perp \underline{e}_j, \qquad \textit{per ogni } i \neq j.$$

Inoltre, per ogni vettore $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ si ha

$$\langle \underline{v}, \underline{e}_i \rangle = v_i.$$

- **Es.** In R^3, i vettori $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ortogonali al vettore $\underline{w} = (1, -2, 3)$ sono le soluzioni dell'equazione $v_1 - 2v_2 + 3v_3 = 0$, formano dunque un piano.
- **Oss.** In R^2 la condizione di ortogonalita' $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$, fra due vettori $\underline{a} = (a_1, a_2), \underline{b} = (b_1, b_2)$ si puo' esprimere, nel caso in cui nessuno dei due stia sull'ase y, anche nella forma $m_a m_b = -1$, dove m_a, m_b sono le pendenze delle rette individuate da $\underline{a}, \underline{b}$.

Prop. *Per ogni* $\underline{v}, \underline{v}', \underline{w}, \underline{w}'$ *vettori di* R^n *e per ogni* λ, μ *scalari in* R, *si ha*

$$\begin{array}{rcl} \langle \underline{v} + \underline{v}', \underline{w} \rangle & = & \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}', \underline{w} \rangle \\ \langle \lambda \underline{v}, \underline{w} \rangle & = & \lambda \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{w} + \underline{w}' \rangle & = & \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w}' \rangle \\ \langle \underline{v}, \mu \underline{w} \rangle & = & \mu \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle & = & \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle \end{array}$$

Le prime quattro proprieta' si esprimono dicendo che il prodotto scalare e' *bilineare*, la quinta dicendo che il prodotto scalare e' *simmetrico*.

La proprieta' di simmetria deriva dalla commutativita' del prodotto di numeri reali. La linearita' rispetto al primo argomento si puo' verificare cosi'

$\langle \underline{v} + \underline{v}', \underline{w} \rangle = (\underline{v} + \underline{v}')^T \underline{w} = (\underline{v}^T + \underline{v}'^T) \underline{w} = \underline{v}^T \underline{w} + \underline{v}'^T \underline{w} = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}', \underline{w} \rangle$;

$\langle \lambda \underline{v}, \underline{w} \rangle = (\lambda \underline{v})^T \underline{w} = \lambda \underline{v}^T \underline{w} = \lambda \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$.

La linearita' rispetto al secondo argomento si puo' dedurre per simmetria dalla linearita' rispetto al primo argomento.

3. **Def.** *La norma del vettore* $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *e' il numero reale* $\|\underline{v}\|$ *definito da*

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}.$$

Se $\|\underline{v}\| = 1$, *si dice che* $\underline{v}$ *e' un versore.*

- **Oss.** Fissato nel piano un sistema cartesiano ortogonale monometrico con origine O, la lunghezza (rispetto all'unita' di misura comune con cui sono stati scalati gli assi) di un vettore $\underline{v} = (v_1, v_2)$ e' data, per il teorema di Pitagora, da

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

  Analogamente, fissato nello spazio un sistema cartesiano ortogonale monometrico con origine O, la lunghezza (rispetto all'unita' di misura comune con cui sono stati scalati gli assi) di un vettore $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e' data, in sostanza ancora per il teorema di Pitagora, da

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

  Dunque la nozione di norma di un vettore di R^n estende la nozione di lunghezza di un vettore 'geometrico'.

- **Es.** Ciascun vettore della base canonica di R^n e' un versore.

Prop. *Per ogni* $\underline{v}, \underline{w}$ *vettori di* R^n *e per ogni* λ *scalari in* R, *si ha*

$$\begin{array}{l} \|\underline{v}\| \geq 0, \quad \|\underline{v}\| = 0 \ \textit{sse}\ \underline{v} = \underline{0}; \\ \|\lambda \underline{v}\| = |\lambda| \|\underline{v}\|; \\ \|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|; \\ |\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle| \leq \|\underline{v}\| \|\underline{w}\|. \end{array}$$

La terza proprieta' viene detta 'disuguaglianza triangolare' in quanto nel piano e nello spazio ordinari afferma in sostanza che in un triangolo la lunghezza di un lato non supera la somma delle lunghezze degli altri due. Le prime tre proprieta' sono comunemente assunte come assiomi per i cosiddetti spazi normati. Su R^n si possono definire anche altre norme, anche sensibilmente diverse da quella in esame. L'ultima proprieta' viene chiamata 'disuguaglianza di Cauchy-Schwarz'.

La disuguaglianza triangolare, nella sua forma equivalente

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 \leq (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

si puo' dedurre da quella di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{array}{llll} \|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = & \langle \underline{v} + \underline{w}, \underline{v} + \underline{w} \rangle = & \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle + 2\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle \leq & \\ & & \|\underline{v}\|^2 + 2\|\underline{v}\|\|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2 = & (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2. \end{array}$$

Non si riporta la dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

In R^n vale il teorema di Pitagora:

Prop. *Per ogni $\underline{v}, \underline{w}$ vettori di R^n fra loro ortogonali si ha*

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2.$$

Verifica:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \langle \underline{v} + \underline{w}, \underline{v} + \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle + 2\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2.$$

Si noti che vale anche il viceversa: due vettori $\underline{v}, \underline{w}$ soddisfacenti la relazione $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2$ sono necessariamente ortogonali.

4. **Def.** *L'angolo fra due vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ di R^n e' definito come l'unico numero reale θ, con $0 \leq \theta \leq \pi$ tale che*

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{\|\underline{v}\| \|\underline{w}\|}.$$

Si noti che la definizione e' ben posta, in quanto il secondo membro varia fra -1 e 1, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

- **Es.** In R^n, l'angolo θ_n fra il vettore $\underline{u} = (1, 1, \ldots, 1)$ ed un qualsiasi vettore $\underline{e}_i$ della base canonica si puo' ricavare dalla

$$\cos(\theta_n) = \frac{\langle \underline{u}, \underline{e}_i \rangle}{\|\underline{u}\| \|\underline{e}_i\|} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Si osservi che θ_n tende a $\pi/2$ per n che tende ad infinito.

5. **Def.** *La distanza fra i vettori $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ e' il numero reale $d(\underline{v}, \underline{w})$ definito da*

$$d(\underline{v}, \underline{w}) = \|\underline{v} - \underline{w}\| = \sqrt{\langle \underline{v} - \underline{w}, \underline{v} - \underline{w} \rangle} = \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + \ldots + (v_n - w_n)^2}.$$

Prop. *Per ogni $\underline{v}, \underline{w}, \underline{z}$ vettori di R^n si ha*

$$\begin{array}{l} d(\underline{v}, \underline{w}) \geq 0, \quad d(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \textit{ sse } \underline{v} = \underline{w}; \\ d(\underline{v}, \underline{w}) = d(\underline{w}, \underline{v}); \\ d(\underline{v}, \underline{w}) \leq d(\underline{v}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{w}). \end{array}$$

la verifica di queste proprieta' viene lasciata per esercizio.