Laboratorio di Matematica, 15.10.2003

Problema. Nel piano, riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si considerino il vettore $\underline{a} = (2, 1)$, la linea $L = Span(\underline{a})$ da esso generata, e il vettore $\underline{b} = (4, 6)$. *Qual'e' la distanza di $\underline{b}$ da L?*

Con distanza del vettore $\underline{b}$ dalla linea L intendiamo il numero reale ottenuto considerando le distanze di $\underline{b}$ da tutti i vettori $\underline{l}$ della linea L e poi prendendone l'estremo inferiore

$$d(\underline{b}, L) = inf\{d(\underline{b}, \underline{l});\ \underline{l} \in L\}.$$

Dal punto di vista geometrico, si puo' osservare che questo estremo inferiore in realta' e' un minimo, e viene assunto in corrispondenza del vettore $\underline{p}$ la cui punta e' la proiezione ortogonale sulla linea L della punta del vettore $\underline{b}$, in breve in corrispondenza del vettore $\underline{p}$ proiezione ortogonale di $\underline{b}$ su L :

$$inf\{d(\underline{b}, \underline{l});\ \underline{l} \in L\} = d(\underline{b}, \underline{p}), \qquad dove\ (\underline{b} - \underline{p}) \perp \underline{a}.$$

Infatti, dal Teorema di Pitagora segue che

$$d(\underline{b}, \underline{l})^2 = d(\underline{b}, \underline{p})^2 + d(\underline{p}, \underline{l})^2 \geq d(\underline{b}, \underline{p})^2, \quad per\ ogni\ \underline{l}\ in\ L$$

Ora, $\underline{p} \in L$ significa che per un certo scalare λ si ha $\underline{p} = \underline{a}\lambda$, mentre $(\underline{b} - \underline{p}) \perp \underline{a}$ significa $\langle \underline{b} - \underline{p}, \underline{a} \rangle = 0$. Sostituendo la prima nella seconda si ha $\langle \underline{b} - \underline{a}\lambda, \underline{a} \rangle = 0$, cioe'

$$\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle - \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle \lambda = 0.$$

Questa e' un'equazione di primo grado nell'incognita λ, con coefficiente $\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle = \|\underline{a}\|^2 \neq 0$, in quanto $\underline{a} \neq 0$. Risolvendola si ha

$$\lambda = \frac{\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle}{\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle},$$

scalare che viene detto *coefficiente di Fourier di $\underline{b}$ rispetto ad $\underline{a}$*. Dunque la proiezione ortogonale di $\underline{b}$ su $\underline{a}$ e' data da

$$\underline{p} = \underline{a}\lambda = \underline{a}\frac{\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle}{\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle}.$$

Nel caso specifico in esame si ha $\underline{p} = (\frac{28}{5}, \frac{14}{5})$ e $d(\underline{b}, L) = \frac{8}{5}\sqrt{5}$.

Ora, il problema posto ed procedimento adottato sono indipendenti non solo dai dati numerici, ma anche dal fatto di essere nel piano ...

Th. *In R^n si considerino un vettore $\underline{a}$ non nullo, la linea $L = Span(\underline{a})$ da esso generata, ed un vettore $\underline{b}$. Definiamo la distanza del vettore $\underline{b}$ dalla linea L come il numero reale*

$$d(\underline{b}, L) = inf\{d(\underline{b}, \underline{l});\ \underline{l} \in L\}.$$

Dal teorema di Pitagora segue che questo estremo inferiore in realta' e' un minimo, e viene assunto in corrispondenza del vettore $\underline{p}$ proiezione ortogonale di $\underline{b}$ su L :

$$inf\{d(\underline{b}, \underline{l});\ \underline{l} \in L\} = d(\underline{b}, \underline{p}), \qquad dove\ (\underline{b} - \underline{p}) \perp \underline{a}.$$

A sua volta, la proiezione ortogonale di $\underline{b}$ su $\underline{a}$ e' data da

$$\underline{p} = \underline{a}\frac{\langle \underline{b}, \underline{a}\rangle}{\langle \underline{a}, \underline{a}\rangle}.$$

Infine, il problema posto, il procedimento adottato ed i risultati ottenuti si possono ulteriormente estendere, fino a comprendere il problema di determinare la distanza di un vettore da un sottospazio qualsiasi in R^n. Si vedra' in seguito che il punto di vista che cosi' emerge e' anche la chiave per il processo di risoluzione ai minimi quadrati di un sistema lineare.

Problema. Nello spazio, riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si considerino il vettori $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ dati dalle colonne della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Questi vettori stanno in realta' in un piano, precisamente nel piano costituito dalle soluzioni dell'equazione lineare

$$x + y - z = 0.$$

Si ha che i vettori $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ costituiscono una base per l'insieme dei vettori $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$, inoltre le coordinate di questi vettori rispetto a questa base sono date, nell'ordine, dalle colonne della matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo cosi' una rappresentazione in R^2 dei quattro vettori dati, che conserva le relazioni lineari. *Come si puo' dare una rappresentazione che conservi non solo le relazioni lineari, ma anche le lunghezze e gli angoli?*

Per mettere le mani su questo problema, la cui risoluzione effettiva si vedra' in seguito, abbiamo bisogno della nozione di *base ortogonale.*

Nel piano R^2 e nello spazio R^3 si ha l'evidenza geometrica che vettori (non nulli) a due a due ortogonali sono linearmente indipendenti; questo fatto e' di portata generale, sussiste in ogni spazio R^n.

Prop. *Se i vettori non nulli $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_p$ in R^n sono a due a due ortogonali, allora sono linearmente indipendenti.*

Verifica Dobbiamo mostrare che se una combinazione lineare dei vettori $\underline{a}_i$ ha per risultato il vettore nullo

$$\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 + \ldots + \lambda_p\underline{a}_p = \underline{0},$$

allora tutti i coefficienti λ_i devono essere nulli. Si puo' procedere cosi': facendo il prodotto scalare di entrambi i membri col vettore $\underline{a}_1$, e utilizzando la proprieta' di bilinearita' del prodotto scalare, si ottiene

$$\lambda_1\langle \underline{a}_1, \underline{a}_1\rangle + \lambda_2\langle \underline{a}_2, \underline{a}_1\rangle + \ldots + \lambda_p\langle \underline{a}_p, \underline{a}_1\rangle = \langle \underline{0}, \underline{a}_1\rangle = 0,$$

utilizzando l'ipotesi di ortogonalita' si ottiene

$$\lambda_1\langle \underline{a}_1, \underline{a}_1\rangle = 0.$$

Ora, dall'ipotesi $\underline{a}_1 \neq 0$ segue $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_1 \rangle \neq 0$, e dunque si ottiene $\lambda_1 = 0$. In modo analogo si mostra che $\lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$.

Def. *Una base di un sottospazio V di R^n i cui vettori siano a due a due ortogonali si dice base ortogonale di V; una base ortogonale di V i cui vettori siano versori si dice base ortonormale di V.*

Esempi.

- La base canonica di R^n e' una base ortonormale di R^n.
- I vettori $(1, 1, 2), (1, 1, -1), (1, -1, 0)$ costituiscono una base ortogonale di R^3.

Rispetto ad una base ortogonale, meglio ancora se ortonormale, le coordinate di un vettore si calcolano facilmente.

Prop. *Sia $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_p\}$ una base di un sottospazio V di R^n e sia $\underline{v}$ un vettore di V. Allora:*

- *se $\mathcal{B}$ e' una base ortogonale di V, la coordinata di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{b}_i$ e' il coefficiente di Fourier di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{b}_i$;*
- *se $\mathcal{B}$ e' una base ortonormale di V, la coordinata di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{b}_i$ e' il prodotto scalare di $\underline{v}$ per $\underline{b}_i$.*

Verifica Consideriamo la rappresentazione di $\underline{v}$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \ldots + \lambda_p \underline{b}_p,$$

facciamo il prodotto scalare di entrambi i membri col vettore $\underline{b}_1$ ed otteniamo

$$\langle \underline{v}, \underline{b}_1 \rangle = \lambda_1 \langle \underline{b}_1, \underline{b}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \underline{b}_2, \underline{b}_1 \rangle + \ldots + \lambda_p \langle \underline{b}_p, \underline{b}_1 \rangle,$$

per l'ipotesi di ortogonalita' si ha

$$\langle \underline{v}, \underline{b}_1 \rangle = \lambda_1 \langle \underline{b}_1, \underline{b}_1 \rangle,$$

da cui si ottiene che la coordinata di $\underline{v}$ rispetto al vettore $\underline{v}_1$ della base $\mathcal{B}$ e' il coefficiente di Fourier di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{v}_1$:

$$\lambda_1 = \frac{\langle \underline{v}, \underline{b}_1 \rangle}{\langle \underline{b}_1, \underline{b}_1 \rangle}.$$

Per le altre coordinate si procede in modo analogo.

Esercizio. Si calcolino le coordinate del vettore $(1, -1, 1)$ rispetto alla base ortogonale di R^3 costituita dai vettori $(1, 1, 2), (1, 1, -1), (1, -1, 0)$.