Laboratorio di Matematica, 21.10.2003

PROBLEMA *Data la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} .7 & .2 \\ .3 & .8 \end{bmatrix},$$

calcolare la sua potenza $100-$*ma. Piu' in generale, studiare l'evoluzione delle potenze di* A

$$A, A^2, A^3, \dots, A^p, \dots$$

Per mettere le mani su questo problema, consideriamo l'azione della matrice A sui vettori di R^2, guardiamo cioe' la matrice A come la funzione "premoltiplica per A" da R^2 verso R^2

$$x \mapsto Ax, \qquad \textit{per ogni } x \textit{ in } R^2;$$

precisamente

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad Ax = \begin{bmatrix} .7x_1 & +.2x_2 \\ .3x_1 & +.8x_2 \end{bmatrix}.$$

Cerchiamo dei vettori v sui quali la matrice A agisca come la moltiplicazione per uno scalare, cioe' tali che

$$Av = \lambda v,$$

per un certo λ in R. Un vettore v cosiffatto viene detto *autovettore* di A, mentre lo scalare λ viene detto *autovalore* di A associato a v; i rispettivi termini in lingua inglese sono *eigenvector* e *eigenvalue.*

Ad esempio:

- il vettore $v_1 = (2, 3)$ e' un autovettore di A con autovalore associato $\lambda_1 = 1$:

$$Av_1 = \begin{bmatrix} .7 & .2 \\ .3 & .8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1v_1;$$

- il vettore $v_2 = (-1, 1)$ e' un autovettore di A con autovalore associato$\lambda_2 = 1/2$:

$$Av_2 = \begin{bmatrix} .7 & .2 \\ .3 & .8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.5 \\ .5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} v_2.$$

Il calcolo dell'azione delle potenze di A su un autovettore e' particolarmente semplice:

$Av = \lambda v;$
$A^2 v = A(Av) = A\lambda v = \lambda Av = \lambda^2 v;$
$\dots$
$A^p v = \dots = \lambda^p v;$
$\dots$

In particolare si ha

$$A^p v_1 = v_1, \qquad A^p v_2 = 2^{-p} v_2.$$

E sull'azione di A e delle sue potenze sugli altri vettori di R^2 cosa si puo' dire? Si osserva che gli autovettori v_1 e v_2 costituiscono una base di R^2, in particolare ogni vettore x di R^2 si puo' scrivere in uno (ed un solo) modo come loro combinazione lineare

$$x = av_1 + bv_2.$$

Allora

$$Ax = A(av_1 + bv_2) = aAv_1 + bAv_2 = av_1 + \frac{1}{2}bv_2,$$

cioe' la matrice A fissa la coordinata di x rispetto a v_1 e dimezza la coordinata di x rispetto a v_2. L'azione delle potenze di A sul vettore x e' data da

$$A^p x = A^p(av_1 + bv_2) = \ldots = av_1 + 2^{-p}bv_2.$$

In particolare, l'azione di A^{100} sui vettori della base canonica

$$e_1 = .2v_1 - .6v_2,$$
$$e_2 = .2v_1 + .4v_2,$$

e' data da

$$A^{100}e_1 = .2v_1 - .6\ 2^{-100}v_2 \cong .2v_1 = .2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .4 \\ .6 \end{bmatrix},$$
$$A^{100}e_2 = .2v_1 + .4\ 2^{-100}v_2 \cong .2v_1 = .2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .4 \\ .6 \end{bmatrix}.$$

Dunque per la potenza 100$-$ma della matrice A si ottiene la stima

$$A^{100} = A^{100}I = A^{100}[e_1\ e_2] = [A^{100}e_1\ A^{100}e_2] \cong \begin{bmatrix} .4 & .4 \\ .6 & .6 \end{bmatrix}.$$

PROBLEMA *Data una matrice A quadrata di ordine n, studiare l'evoluzione delle potenze di A*

$$A, A^2, A^3, \ldots, A^p, \ldots$$

Anche per mettere le mani sul problema generale, consideriamo l'azione della matrice A sui vettori di R^n, guardiamo cioe' la matrice A come la funzione "premoltiplica per A" da R^n verso R^n

$$x \mapsto Ax, \qquad \textit{per ogni } x \textit{ in } R^n.$$

Def. *Un autovettore della matrice A e' un vettore v di R^n, diverso dal vettore nullo, tale che*

$$Av = \lambda v,$$

per un certo λ in R, che viene detto l'autovalore di A associato a v.

Una precisazione sui termini: si parla dell'autovalore associato ad un autovettore, e non genericamente di un autovalore associato ad un autovettore in quanto se λ_1 e λ_2 sono autovalori associati a v, allora

$$Av = \lambda_1 v, \quad Av = \lambda_2 v, \qquad \textit{implicano} \quad \underline{0} = (\lambda_1 - \lambda_2)v, \quad \textit{che implica, essendo } v \neq \underline{0},$$

$0 = \lambda_1 - \lambda_2, \qquad cioe' \qquad \lambda_1 = \lambda_2.$

Si puo' garantire l'esistenza di una base di R^n costituita da autovettori di A? La risposta e' negativa, non si puo' nemmeno garantire l'esistenza di un autovettore per A : ad esempio la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

agisce su ciascun vettore di R^2 come una rotazione di un angolo retto (in senso antiorario), in particolare muta la direzione di ogni vettore non nullo, dunque non possiede alcun autovettore.

Come si possono determinare gli autovettori e gli autovalori di A? Per rispondere a questa domanda, bisogna riformulare la nozione di autovalore: il fatto che uno scalare λ in R sia un autovalore della matrice A, cioe' il fatto che λ sia associato a qualche autovettore di A, significa che esiste un vettore v diverso dal vettore nullo tale che

$$Av = \lambda v, \qquad \textit{in altri termini} \qquad (A - \lambda I)v = \underline{0};$$

cio' accade sse il determinante della matrice $A - \lambda I$ si annulla:

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

Il primo membro di questa uguaglinza e' un polinomio di grado n in λ, detto *polinomio caratteristico* della matrice A :

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = c_0 - c_1\lambda + c_2\lambda^2 - \ldots \pm \lambda^n.$$

Riassumendo: gli autovalori di A si possono determinare come le radici del polinomio caratteristico.

Per ciacun autovalore λ_0 della matrice A, gli autovettori di A cui corrisponde λ_0 si possono determinare risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$Av = \lambda_0 v, \qquad \textit{in altri termini} \qquad (A - \lambda_0 I)v = \underline{0}.$$

Esempio. Il polinomio caratteristico della matrice $A = \begin{bmatrix} .7 & .2 \\ .3 & .8 \end{bmatrix}$ e'

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} .7 - \lambda & .2 \\ .3 & .8 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1.5\lambda + .5$$

Questo polinomio di secondo grado ha le due radici reali 1 e .5, questi sono dunque gli autovalori di A.
Gli autovettori di A cui corrisponde l'autovalore $\lambda = 1$ si possono determinare risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$Av = v, \qquad \textit{in altri termini} \qquad (A - I)v = \underline{0},$$

esplicitamente

$$\begin{bmatrix} -.3 & .2 \\ .3 & -.2 \end{bmatrix} v = \underline{0}, \quad cioe' \quad \begin{cases} -.3v_1 & +.2v_2 & = & 0 \\ .3v_1 & -.2v_2 & = & 0 \end{cases}, \quad cioe' \quad -.3v_1 + .2v_2 = 0.$$

Gli autovettori di A cui corrisponde l'autovalore $\lambda = .5$ si possono determinare risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$Av = .5v, \qquad \textit{in altri termini} \qquad (A - .5I)v = \underline{0},$$

esplicitamente

$$\begin{bmatrix} .2 & .2 \\ .3 & .3 \end{bmatrix} v = \underline{0}, \quad cioe' \quad \left\{ \begin{array}{rrcl} .2v_1 & +.2v_2 & = & 0 \\ .3v_1 & +.3v_2 & = & 0 \end{array} \right. , \quad cioe' \quad v_1 + v_2 = 0.$$

Esempio. Il polinomio caratteristico della matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e'

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2.$$

Questo polinomio di secondo grado ha l'unica radice reale 0, questo e' dunque l'unico autovalore di A.
Gli autovettori di A si possono determinare risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$Av = \underline{0}, \quad \textit{esplicitamente} \quad v_2 = 0,$$

essi sono dunque i vettori non nulli sull'asse delle ascisse. Con gli autovettori di A non si puo' costruire alcuna base di R^2.

Esempio. Il polinomio caratteristico della matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e'

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Ora, questo polinomio di secondo grado non ha alcuna radice reale, dunque la matrice A non possiede autovalori e dunque non possiede autovettori. In realta' questo polinomio ha due radici, i e $-i$, nel campo complesso C; per ciascuno di questi autovalori si puo' determinare un autovettore in C^2, ... non ci occuperemo pero' di questo caso.