

Laboratorio di Matematica, qualche esercizio - II

Esercizi su autovalori, autovettori e sistemi di equazioni alle differenze finite.

1. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + (1 + i)y = 0 \\ ix + (1 - i)y = 1 \end{cases}$$

2. Per ciascuno dei seguenti sistemi di equazioni alle differenze

- Si determini la soluzione generale.
- Si discuta, in funzione dello stato iniziale $\underline{x}(0)$, il comportamento della successione $\underline{x}(n)$ per $n \rightarrow +\infty$.

$$\begin{cases} x(n+1) = 0.6x(n) + 0.5y(n) \\ y(n+1) = 0.4x(n) + 0.5y(n) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
$$\begin{cases} x(n+1) = -1.5y(n) \\ y(n+1) = x(n) + 3.5y(n) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3. Per ciascuno dei seguenti sistemi di equazioni alle differenze, si determini la soluzione generale, e la soluzione particolare per $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} x(n+1) = -y(n) \\ y(n+1) = x(n) - \sqrt{2}y(n) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
$$\begin{cases} x(n+1) = -0.5y(n) \\ y(n+1) = 0.5x(n) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

4. E' data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si determini una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale, e si verifichi che la matrice trovata soddisfa queste condizioni.

5. E' data la matrice simmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini una matrice ortogonale Q tale che $Q^T A Q$ sia una matrice diagonale.

6. La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e' diagonalizzabile?

7. Si dimostri che una matrice di Markov ha sempre un autovalore uguale a 1.

Esercizi sui sistemi di equazioni differenziali.

1. E' dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

Si determini la soluzione generale. Si discuta, in funzione dello stato iniziale $\underline{x}(0)$, il comportamento della funzione $\underline{x}(t)$ per $t \rightarrow +\infty$.

2. E' dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Si determini la soluzione generale, e la soluzione particolare per $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.