Laboratorio di Matematica, A.A. 2009-2010; I modulo;

Lezione I.

1. La nostra discussione si svolgerà nello spazio $\mathbb{R}^n$ costituito dalle $n-$ple ordinate di numeri reali, cui ci riferiremo a volte col termine "vettori" e a volte col termine "punti" di $\mathbb{R}^n$. Per due qualsiasi vettori $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, in $\mathbb{R}^n$ ed un qualsiasi scalare α in $\mathbb{R}$, sono definite la somma $\underline{x} + \underline{y}$ e il prodotto $\alpha\underline{x}$. Quando occorra pensare un vettore come matrice, esso sara' pensato come colonna.

2. Siano $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ due vettori in $\mathbb{R}^n$. Il numero reale dato da

$$\begin{aligned} \underline{x} \cdot \underline{y} &:= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \underline{x}^T\underline{y} \end{aligned}$$

   viene detto *prodotto interno* di x per y.

   Proprietà del prodotto interno: Per ogni $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, si ha

   - $(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}) \cdot \underline{z} = \alpha(\underline{x} \cdot \underline{z}) + \beta(\underline{y} \cdot \underline{z})$;
   - $\underline{x} \cdot (\beta\underline{y} + \gamma\underline{z}) = \beta(\underline{x} \cdot \underline{y}) + \gamma(\underline{x} \cdot \underline{z})$;
   - $\underline{x} \cdot \underline{y} = \underline{y} \cdot \underline{x}$;
   - $\underline{x} \cdot \underline{x} \geq 0$, e $\underline{x} \cdot \underline{x} = 0$ se e solo se $\underline{x} = \underline{0}$.

3. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in un punto O, e identificati i vettori applicati in O con vettori in $\mathbb{R}^2$, si verifica che due vettori (v_1, v_2) e (w_1, w_2) sono fra loro ortogonali se e solo se $v_1w_1 + v_2w_2 = 0$. Fissato nelo spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in un punto O, e identificati i vettori applicati in O con vettori in $\mathbb{R}^3$, si verifica che due vettori (v_1, v_2, v_3) e (w_1, w_2, w_3) sono fra loro ortogonali se e solo se $v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0$.

   Nello spazio vetttoriale $\mathbb{R}^n$, due vettori $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ si dicono *ortogonali* se

$$v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n = 0,$$

   cioe' se

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

   Si noti che in $\mathbb{R}^n$ i vettori della base canonica $\underline{e_1} = (1, 0, \ldots, 0)$, $\underline{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ... $\underline{e_n} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ sono a due a due ortogonali.

4. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in un punto O, e identificati i vettori applicati in O con vettori in $\mathbb{R}^2$, si verifica che la lunghezza di un vettore (v_1, v_2) e' data da $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Fissato nelo spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in un punto O, e identificati i vettori applicati in O con vettori in $\mathbb{R}^3$, si verifica che la lunghezza di un vettore (v_1, v_2, v_3) e' data da $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

   Nello spazio $\mathbb{R}^n$, diciamo *norma* di un vettore $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ il numero reale

   $$\|\underline{v}\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2},$$

   cioe'

   $$\|\underline{v}\| := \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}}.$$

   Si noti che tutti i vettori della base canonica hanno norma 1.

5. Osserviamo che

   $$\begin{aligned} \|\underline{x} + \underline{y}\|^2 &= \big(\underline{x} + \underline{y}\big) \cdot \big(\underline{x} + \underline{y}\big) \\ &= \underline{x} \cdot \underline{x} + 2\underline{x} \cdot \underline{y} + \underline{y} \cdot \underline{y} \\ &= \|\underline{x}\|^2 + 2\underline{x} \cdot \underline{y} + \|\underline{y}\|^2. \end{aligned}$$

   Ora, se $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono ortogonali, si ha

   $$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2.$$

   Questa proposizione viene detta "teorema di Pitagora", per il significato che assume nel piano $\mathbb{R}^2$.

6. Per ogni $\underline{x}$ e $\underline{y}$ in $\mathbb{R}^n$, vale la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

   $$|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|.$$

   Questa disuguaglianza si puo' esprimere nella forma

   $$-1 \leq \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{\|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|} \leq 1,$$

   che permette di porre

   $$\frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{\|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|} = cos(\vartheta),$$

   e cosi' di individuare uno ed un solo valore di ϑ, con $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Questo valore viene detto *angolo* fra i vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$.

7. Proprietà della norma. Per ogni $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

   - $\|\underline{x}\| \geq 0$, e $\|\underline{x}\| = 0$ se e solo se $\underline{x} = \underline{0}$;
   - $\|\alpha\underline{x}\| = |\alpha| \, \|\underline{x}\|$;
   - $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$.

L'ultima di queste proprietà viene detta *disuguaglianza triangolare*, per il significato che assume nel piano $\mathbb{R}^2$.

La disuguaglianza triangolare si puo' dedurre dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\|\underline{x}+\underline{y}\|^2 &= \|\underline{x}\|^2 + 2\underline{x}\cdot\underline{y} + \|\underline{y}\|^2 \leq \text{per Cauchy-Schwarz}\\ &\leq \|\underline{x}\|^2 + 2\|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\| + \|\underline{y}\|^2 = \left(\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|\right)^2.\end{aligned}$$

8. Nello spazio $\mathbb{R}^n$, diciamo *distanza* fra due punti $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ il numero reale dato da

$$d(\underline{v},\underline{w}) := \sqrt{(v_1-w_1)^2 + (v_2-w_2)^2 + \cdots + (v_n-w_m)^2}$$

cioe'

$$d(\underline{v},\underline{w}) := \|\underline{v}-\underline{w}\|.$$

Proprietà della distanza. Per ogni $\underline{x},\underline{y},\underline{z} \in \mathbb{R}^n$, si ha

- $d(\underline{x},\underline{y}) \geq 0$, e $d(\underline{x},\underline{y}) = 0$ se e solo se $\underline{x} = \underline{y}$;
- $d(\underline{x},\underline{y}) = d(\underline{y},\underline{x})$;
- $d(\underline{x},\underline{y}) \leq d(\underline{x},\underline{z}) + d(\underline{z},\underline{y})$.

L'ultima di queste proprietà viene detta *disuguaglianza triangolare.*

La disuguaglianza triangolare per la distanza si puo' ottenere dalla disuguaglianza triangolare per la norma nel modo seguente:

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{x}-\underline{y}\| = \|(\underline{x}-\underline{z})+(\underline{z}-\underline{y})\| \leq \|\underline{x}-\underline{z}\| + \|\underline{z}-\underline{y}\| = d(\underline{x},\underline{z}) + d(\underline{z},\underline{y}).$$

9. Esercizio. In $\mathbb{R}^2$ si considerino i vettori $\underline{a} = (1,1,0)$, $\underline{b} = (1,1,1)$, $\underline{c} = (0,1,1)$. Si determinino le loro lunghezze, le distanze e gli angoli fra di essi.

10. Lo spazio $\mathbb{R}^n$, dotato del prodotto interno sopra definito, e delle relazioni e funzioni da esse derivate come sopra (ortogonalita', norma, distanza) viene detto *spazio euclideo* $\mathbb{R}^n$.