Laboratorio di Matematica, A.A. 2009-2010; I modulo;

Lezioni II e III - schema.

Limiti e insiemi aperti; SB, Cap. 1

- **Successioni di vettori; SB, Par. 1.1, pp. 3-6**

  Intorni sferici aperti. Nell'analisi in una variabile reale, un ruolo importante giocano gli intervalli aperti sulla retta reale. Un intervallo aperto e' solitamente visto come l'insieme dei punti strettamente compresi fra due dati estremi, ma puo' essere visto anche come l'insieme dei punti la cui distanza da un dato punto e' strettamente minore di un dato numero reale positivo. Seguendo questo secondo modo di pensare gli intervalli aperti sulla retta reale, possiamo considerare nel piano reale l'insieme dei punti la cui distanza da un dato punto e' strettamente minore di un dato numero reale positivo, ottenendo cosi' un cerchio privato dei punti della circonferenza.

  In generale, si puo' dare la

  Definizione 1. *(SB, p. 4) Sia* $\underline{r}$ *un vettore di* $\mathbb{R}^m$, *e sia* ε *un numero reale positivo. Si dice intorno sferico del punto* $\underline{r}$ *e raggio* ε *(o sfera di centro* $\underline{r}$ *e raggio* ε*) l'insieme*

  $$B_\varepsilon(\underline{r}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : \ \|\underline{x} - \underline{r}\| < \varepsilon\}.$$

  Nel piano si puo' provare, con argomenti di geometria elementare, che due cerchi privi del bordo hanno intersezione non vuota se e solo se la somma dei loro raggi e' maggiore della distanza fra i loro centri. Questa proprieta' si estende agli intorni sferici aperti.

  Proposizione 1. *Due sfere di* $\mathbb{R}^m$ *hanno intersezione non vuota se e solo se la somma dei loro raggi e' maggiore della distanza fra i loro centri.*

  Proviamo che se le due sfere hanno intersezione non vuota, allora la somma dei raggi e' maggiore della distanza fra i centri. Siano $B_\varepsilon(\underline{r})$ e $B_\delta(\underline{s})$ le due sfere. Sappiamo che esiste un vettore $\underline{t}$ in $B_\varepsilon(\underline{r}) \frown B_\delta(\underline{s})$, e si ha

  $$\|\underline{r} - \underline{s}\| \leq \|\underline{r} - \underline{t}\| + \|\underline{t} - \underline{s}\| < \varepsilon + \delta.$$

  Provare che se la somma dei raggi e' maggiore della distanza fra i centri, allora le due sfere hanno intersezione non vuota, e' un po' piu' laborioso, e non lo facciamo.

  Limiti. Dal "Dizionario di Matematica," 1989, Rizzoli, alla voce "limite":

  "Il concetto di limite e' il principio fondamentale di tutta l'analisi infinitesimale; su di esso si fondano il calcolo differenziale e integrale e la definizione rigorosa dei principali concetti dell'analisi ... (per es., la definizione di derivata, integrale, continuita', ecc.). Il concetto di limite si trova gia', in forma embrionale, in Eudosso di Cnido e soprattutto in Archimede (il metodo di esaustione puo' considerarsi come la prima formulazione approssimativa del passaggio al limite). In epoca moderna la prima definizione di limite si trova nei *Principia* di Newton (1687), ... La prima chiara esposizione puramente matematica e' dovuta a Cauchy (1821); tale definizione e' rimasta finora sostanzialmente immutata, anche se ..."

e alla voce "esaustione, metodo di":

"Metodo che permette di calcolare o di verificare il valore di una grandezza mediante una serie di approssimazioni la cui finezza diventa abbastanza grande purche' si proceda abbastanza avanti. ... Il metodo fu inventato da Eudosso di Cnido e impiegato da Archimede nel calcolo di π, nella determinazione di aree, in particolare del segmento di parabola, ecc.. Si perdette con Archimede e ricomparve nel XVI sec. attraverso la nozione di limite."

Esempi di successione di numeri reali sono

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\};$$
$$\{-1, 1, -1, 1, \ldots\};$$
$$a_n = \begin{array}{l} perimetro\ di\ un\ n-agono\ regolare \\ inscritto\ in\ una\ circonferenza\ di\ raggio\ 1 \end{array} \qquad n = 3, 4, 5, \ldots$$

Intuitivamente, si puo' dire che i termini della prima successione si avvicinano indefinitamente al numero 0, che i termini della seconda successione non si avvicinano indefinitamente a nessun numero, mentre i termini della terza successione permettono di determinare 2π con approssimazione fine quanto si voglia.

Una successione di numeri reali e' assegnata mediante una legge che associa ad ogni numero intero positivo un numero reale. Solitamente si rappresenta nella forma

$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$,

oppure $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, lasciando intuire al lettore come ottenere i termini successivi.

Definizione 2. *Diciamo che una successione di numeri reali* $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ *converge a un numero reale* b *se, comunque si prenda un intervallo aperto centrato in* b, *si ha che da un certo indice in poi tutti gli elementi della succesione stanno in tale intervallo. In altri termini: comunque si prenda un numero reale positivo* ε *esiste un intero* N *tale che,*

$$per\ ogni\ n \geq N, \qquad a_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Il numero b *e' detto limite della successione.*

Ai sensi di questa definizione, per le tre successioni sopra considerate si ha che: la prima successione converge a 0 (lo si verifichi per esercizio), la seconda successione non converge a nessun numero reale (lo si verifichi per esercizio), la terza successione converge a 2π.

Si prova che l'operazione di prendere il limite di una successione si comporta bene rispetto alle operazioni (somma, prodotto ...) sui numeri reali. Queste proprieta' vengono poi usate per ricondurre il calcolo di limiti complessi al calcolo di limiti piu' semplici.

Passiamo ora dai numeri reali ai vettori.

Definizione 3. *(SB, p.4) Una successione di vettori* $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \ldots\}$ *di* $\mathbb{R}^m$ *converge al vettore* $\underline{x}$ *di* $\mathbb{R}^m$ *se, comunque scelto il numero reale positivo* ε, *esiste un intero* N *tale che per ogni* $n \geq N$ *vale* $\underline{x}_n \in B_\varepsilon(\underline{x})$, *ovvero*

$$d(\underline{x}_n, \underline{x}) = \|\underline{x}_n - \underline{x}\| < \varepsilon.$$

Il vettore $\underline{x}$ *e' detto limite della successione.*

Vediamo come questa definizione si concretizza su un esempio. Nello spazio $\mathbb{R}^2$ consideriamo la successione

$$\underline{x}_n = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{1}{n}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Viene da pensare che la successione converge a $\underline{x} = (1, 0)$; lo verifichiamo usando la definizione. Per ogni numero reale positivo ε, dobbiamo considerare la disuguaglianza

$$\|\underline{x}_n - \underline{x}\| < \varepsilon$$

e chiederci per quali n vale. Nel nostro caso, si ha

$$\| \left(\frac{n+1}{n}, \frac{1}{n}\right) - (1, 0) \| = \| \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \| = \sqrt{\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Dunque la disuguaglianza diviene

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon,$$

che e' soddisfatta per

$$n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}.$$

Indicato con N un intero strettamente maggiore di $\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$, si ha che questa disuguaglianza e' soddisfatta per ogni $n \geq N$. Dunque, per ogni $n \geq N$ vale

$$\|\underline{x}_n - \underline{x}\| < \varepsilon.$$

Abbiamo cosi' verificato che la successione converge a $\underline{x} = (0, 1)$.

Lo studio delle successioni di vettori si puo' ricondurre allo studio delle successioni di numeri, nel senso del seguente

Teorema 1. *(SB, Th. 1.1, p. 5) Una successione di vettori di* $\mathbb{R}^m$ *e' convergente se e solo se tutte le sue* m *successioni delle componenti sono convergenti in* $\mathbb{R}$.

In questo ordine di idee, consideriamo ancora la successione $\underline{x}_n = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ di vettori di $\mathbb{R}^2$. Osserviamo che la successione $\frac{n+1}{n}$ delle prime componenti converge a 1, e che la successione $\frac{1}{n}$ delle seconde componenti converge a 0. Possiamo allora concludere che la successione converge al vettore $(1, 0)$.

Teorema 2. *(SB, Th. 1.2, p. 6) Siano $\{\underline{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\underline{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ due successioni di vettori in $\mathbb{R}^m$ convergenti rispettivamente a $\underline{x}$ e $\underline{y}$, e sia $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di numeri reali convergente a c. Allora la successione $\{\underline{x}_n + c_n\underline{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\underline{x} + c\underline{y}$.*

- **Insiemi aperti; SB, Par. 1.2, pp. 8-10**

Definizione 4. *(SB, p. 8) Un insieme S in $\mathbb{R}^m$ e' aperto se per ogni $\underline{x} \in S$ esiste un intorno sferico di $\underline{x}$ tutto contenuto in S, ovvero*

$$\underline{x} \in S \;\Rightarrow\; \text{esiste un } \varepsilon > 0 \text{ tale che } B_\varepsilon(\underline{x}) \subset S.$$

Alcuni esempi di insiemi aperti.

> In $\mathbb{R}$: ciascun intervallo limitato privato dei suoi estremi; ciascuna semiretta privata del suo punto di origine. In $\mathbb{R}^2$: ogni cerchio privato della sua circonferenza di bordo; ciascun semipiano privato della sua retta di bordo; ciascuna regione angolare privata dei suoi lati.

Alcuni esempi di insiemi non aperti.

> In $\mathbb{R}$: ciascun punto; ciascun intervallo limitato privato di uno dei suoi due estremi. In $\mathbb{R}^2$, ciascun punto, ciascun retta, ciascuna regione angolare privata di uno dei suoi due lati.

Teorema 3. *(SB, Th. 1.3, p. 9) Ogni intorno sferico aperto e' un insieme aperto.*

Teorema 4. *(SB, Th. 1.4, p. 9)*

Ogni unione di insiemi aperti e' un insieme aperto.

Ogni intersezione di un numero finito di insiemi aperti e' un insieme aperto.

- **Insiemi chiusi; SB, Par. 1.2, pp. 10-11**

Definizione 5. *(SB, p. 10) Un insieme di $\mathbb{R}^m$ e' chiuso se per ogni successione convergente tutta contenuta in S, anche il suo limite appartiene ad S.*

Alcuni esempi di insiemi chiusi.

> In $\mathbb{R}$: ciascun punto; ciascun intervallo limitato dotato dei suoi estremi; ciascuna semiretta dotata del suo punto di origine. In $\mathbb{R}^2$: ciascun punto; ciascuna retta; ciascun cerchio dotato della sua circonferenza di bordo; ciascun semipiano dotato della sua retta di bordo; ciascuna regione angolare dotata dei suoi lati.

Alcuni esempi di insiemi non chiusi.

In $\mathbb{R}$: ciascun intervallo limitato privato di uno dei suoi due estremi.
In $\mathbb{R}^2$, ciascuna regione angolare privata di uno dei suoi due lati.

Teorema 5. *(SB, Th. 1.5, p. 11) Un insieme S di $\mathbb{R}^m$ e' chiuso se e solo se il suo complementare S^c in $\mathbb{R}^m$ e' aperto.*

Teorema 6. *(SB, Th. 1.6, p. 11)*

Ogni intersezione di insiemi chiusi e' un insieme chiuso.

Ogni unione di un numero finito di insiemi chiusi e' un insieme chiuso.